

# Calcul de solitons pour des modèles dispersifs

**Laurent Di Menza**

Laboratoire de Mathématiques de Reims, URCA

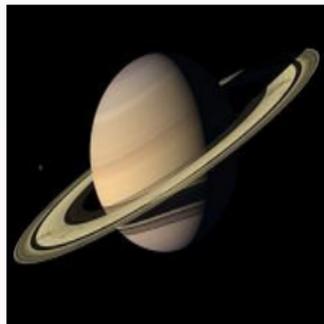
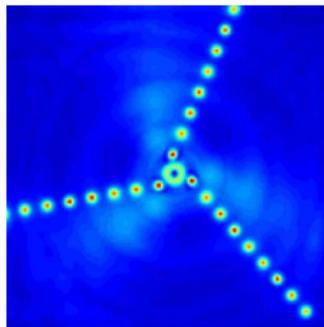
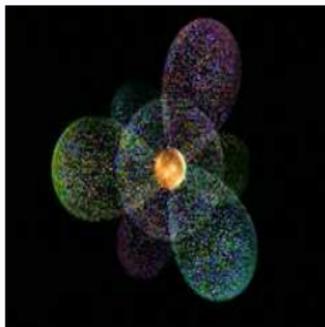
SMAI 2023 - Le Gosier, Guadeloupe

Jeudi 25 mai 2023

# Plan de l'exposé

- 1 Motivation et modèles
- 2 Etats stationnaires pour NLS : méthode de tir
- 3 Etats stationnaires pour les milieux quadratiques : tir et continuation
- 4 Le freak, c'est chic

# 1. Motivation et modèles



# Le Saint-Graal

**Idée générale** : comprendre la **dynamique** de phénomènes observés à diverses échelles (atomique, visible, planétaire, galactique).

# Le Saint-Graal

**Idée générale** : comprendre la **dynamique** de phénomènes observés à diverses échelles (atomique, visible, planétaire, galactique).

**Modèle général** :  $\psi = \psi(t) \in \mathcal{H}$  fonction d'état d'un système physique (particule, densité de matière, etc.),  $\mathcal{N}$  opérateur non linéaire :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(t) = \mathcal{N}(\psi(t)), \quad t \geq 0.$$

# Le Saint-Graal

**Idée générale** : comprendre la **dynamique** de phénomènes observés à diverses échelles (atomique, visible, planétaire, galactique).

**Modèle général** :  $\psi = \psi(t) \in \mathcal{H}$  fonction d'état d'un système physique (particule, densité de matière, etc.),  $\mathcal{N}$  opérateur non linéaire :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(t) = \mathcal{N}(\psi(t)), \quad t \geq 0.$$

**Solutions stationnaires** : lorsque  $\mathcal{N}$  admet l'**invariance de phase**  $\mathcal{N}(e^{i\theta} u) = e^{i\theta} \mathcal{N}(u)$ , on cherche une solution de la forme

$$\psi(t) = e^{i\omega t} u \quad \implies \quad -\omega u = \mathcal{N}(u).$$

# Le Saint-Graal

**Idée générale** : comprendre la **dynamique** de phénomènes observés à diverses échelles (atomique, visible, planétaire, galactique).

**Modèle général** :  $\psi = \psi(t) \in \mathcal{H}$  fonction d'état d'un système physique (particule, densité de matière, etc.),  $\mathcal{N}$  opérateur non linéaire :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(t) = \mathcal{N}(\psi(t)), \quad t \geq 0.$$

**Solutions stationnaires** : lorsque  $\mathcal{N}$  admet l'**invariance de phase**  $\mathcal{N}(e^{i\theta} u) = e^{i\theta} \mathcal{N}(u)$ , on cherche une solution de la forme

$$\psi(t) = e^{i\omega t} u \quad \implies \quad -\omega u = \mathcal{N}(u).$$

Ces solutions se propagent sans **changer de forme** :  $|\psi(t)| = |u|$ .

## Modèles considérés

- NLS de type puissance pure

$$iu_t + \Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0$$

## Modèles considérés

- NLS de type puissance pure

$$iu_t + \Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0$$

- Système quadratique couplé

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial z} + \Delta u - u + \bar{u}v = 0 \\ i\sigma \frac{\partial v}{\partial z} + \Delta v - \rho v + \frac{1}{2}u^2 = 0. \end{cases}$$

## Modèles considérés

- NLS de type puissance pure

$$iu_t + \Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0$$

- Système quadratique couplé

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial z} + \Delta u - u + \bar{u}v = 0 \\ i\sigma \frac{\partial v}{\partial z} + \Delta v - \rho v + \frac{1}{2}u^2 = 0. \end{cases}$$

- Système cubique couplé

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + Kv = 0 \\ i \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + |v|^2 v + Ku = 0. \end{cases}$$

## 2. Calcul d'états stationnaires pour NLS

$$(NLS) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^{2\sigma} \psi = 0,$$

$\psi = \psi(t, x) \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma < \sigma^* := 2/(d - 2)$  : problème de Cauchy **localement bien posé** dans  $H^1(\mathbb{R}^d)$ .

## 2. Calcul d'états stationnaires pour NLS

$$(NLS) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^{2\sigma} \psi = 0,$$

$\psi = \psi(t, x) \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma < \sigma^* := 2/(d-2)$  : problème de Cauchy **localement bien posé** dans  $H^1(\mathbb{R}^d)$ .

### Etats stationnaires :

On cherche  $\psi$  de la forme  $\psi(t, x) = e^{i\omega t} u(x)$  ( $\omega > 0 \rightarrow \omega = 1$  par changement d'échelle et d'amplitude) où  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$  vérifie le problème **elliptique** posé dans l'espace entier.

$$-u + \Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

## 2. Calcul d'états stationnaires pour NLS

$$(NLS) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^{2\sigma} \psi = 0,$$

$\psi = \psi(t, x) \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma < \sigma^* := 2/(d-2)$  : problème de Cauchy **localement bien posé** dans  $H^1(\mathbb{R}^d)$ .

### Etats stationnaires :

On cherche  $\psi$  de la forme  $\psi(t, x) = e^{i\omega t} u(x)$  ( $\omega > 0 \rightarrow \omega = 1$  par changement d'échelle et d'amplitude) où  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$  vérifie le problème **elliptique** posé dans l'espace entier.

$$-u + \Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

**Cas particulier** : on cherche des états localisés, donc tendant (vite) vers zéro à l'infini.

## Cas particulier : la dimension 1

Point de départ :

$$-u + u'' + |u|^{2\sigma} u = 0.$$

On cherche des solutions  $u$  paires, positives et tendant vers 0 en  $\pm\infty$ . La multiplication par  $u'$  donne

$$-\frac{1}{2}(u^2)'(x) + \frac{1}{2}((u')^2)'(x) + \frac{1}{2(\sigma+1)}(u^{2(\sigma+1)})'(x) = 0$$

## Cas particulier : la dimension 1

Point de départ :

$$-u + u'' + |u|^{2\sigma} u = 0.$$

On cherche des solutions  $u$  paires, positives et tendant vers 0 en  $\pm\infty$ . La multiplication par  $u'$  donne

$$-\frac{1}{2}(u^2)'(x) + \frac{1}{2}((u')^2)'(x) + \frac{1}{2(\sigma+1)}(u^{2(\sigma+1)})'(x) = 0$$

En utilisant le fait que  $u'(0) = 0$ , on trouve que  $u(0) = (\sigma+1)^{1/2\sigma}$  et supposant que  $u$  décroît sur  $\mathbb{R}_+$ , on obtient

$$u'(x) = -\sqrt{u^2(x) - \frac{1}{\sigma+1}u^{2(\sigma+1)}(x)},$$

ce qui donne la solution explicite  $u(x) = \frac{(\sigma+1)^{\frac{1}{2\sigma}}}{(\cosh \sigma x)^{\frac{1}{\sigma}}}$ .

## En dimension supérieure

Lorsque  $\sigma < \sigma^*$ , il existe une unique solution strictement positive (l'état **fondamental**) et une **infinité** d'états radiaux dits **excités** ou **nodaux**  $u_k$  caractérisés par le nombre  $k$  d'annulations (Gidas-Ni-Nirenberg, McLeod-Troy-Weissler, Berestycki-Lions, 80-90).

## En dimension supérieure

Lorsque  $\sigma < \sigma^*$ , il existe une unique solution strictement positive (l'état **fondamental**) et une **infinité** d'états radiaux dits **excités** ou **nodaux**  $u_k$  caractérisés par le nombre  $k$  d'annulations (Gidas-Ni-Nirenberg, McLeod-Troy-Weissler, Berestycki-Lions, 80-90).

Caractérisation **variationnelle** en termes de l'action

$$S(u) := \frac{\omega}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \|\nabla u(x)\|^2 - \frac{1}{\sigma+1} |u(x)|^{2(\sigma+1)} \right) dx.$$

## En dimension supérieure

Lorsque  $\sigma < \sigma^*$ , il existe une unique solution strictement positive (l'état **fondamental**) et une **infinité** d'états radiaux dits **excités** ou **nodaux**  $u_k$  caractérisés par le nombre  $k$  d'annulations (Gidas-Ni-Nirenberg, McLeod-Troy-Weissler, Berestycki-Lions, 80-90).

Caractérisation **variationnelle** en termes de l'action

$$S(u) := \frac{\omega}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \|\nabla u(x)\|^2 - \frac{1}{\sigma+1} |u(x)|^{2(\sigma+1)} \right) dx.$$

Permet de déterminer des approximations de l'état fondamental en cherchant les **points critiques** de  $S$  sur un sous-ensemble de fonctions gaussiennes  $u(r) = A e^{-B r^2}$ .

$\implies$  Problème en **dimension finie**.

## Méthode de tir

Les solutions cherchées satisfont l'équation différentielle d'ordre 2

$$\begin{cases} u''(r) + \frac{d-1}{r}u'(r) - u(r) + |u(r)|^{2\sigma}u(r) = 0, & r > 0 \\ u(0) = \beta, \quad u'(0) = 0 \text{ (par régularité)}. \end{cases}$$

**Problème** : détermination de la valeur notée  $u_{k,0}$  de la donnée à l'origine  $\beta$  de telle sorte que la solution s'annule  $k$  fois et tende vers 0 à l'infini : méthode de *tir*.

## Méthode de tir

Les solutions cherchées satisfont l'équation différentielle d'ordre 2

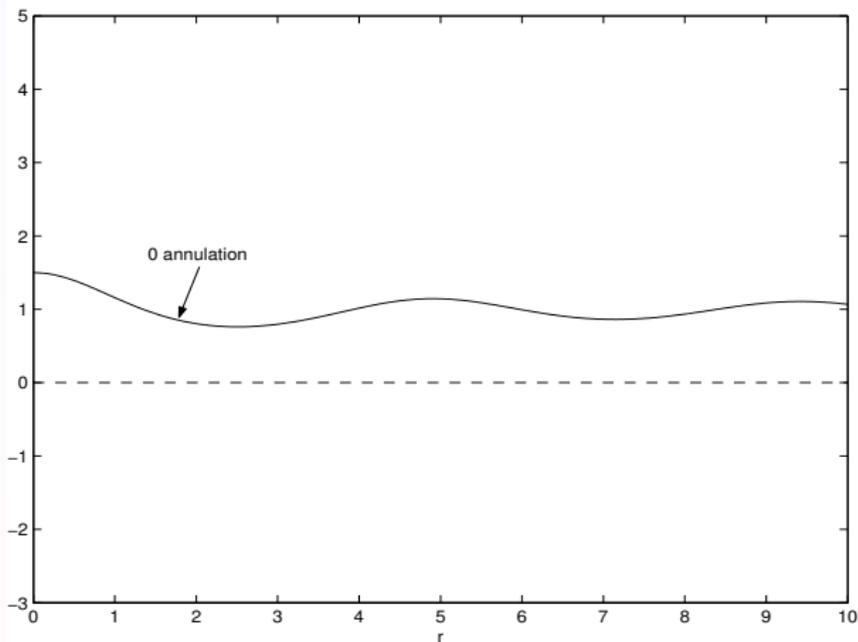
$$\begin{cases} u''(r) + \frac{d-1}{r}u'(r) - u(r) + |u(r)|^{2\sigma}u(r) = 0, & r > 0 \\ u(0) = \beta, \quad u'(0) = 0 \text{ (par régularité)}. \end{cases}$$

**Problème** : détermination de la valeur notée  $u_{k,0}$  de la donnée à l'origine  $\beta$  de telle sorte que la solution s'annule  $k$  fois et tende vers 0 à l'infini : méthode de *tir*.

Numériquement, cela nécessite seulement un solveur de **systèmes différentiels**.

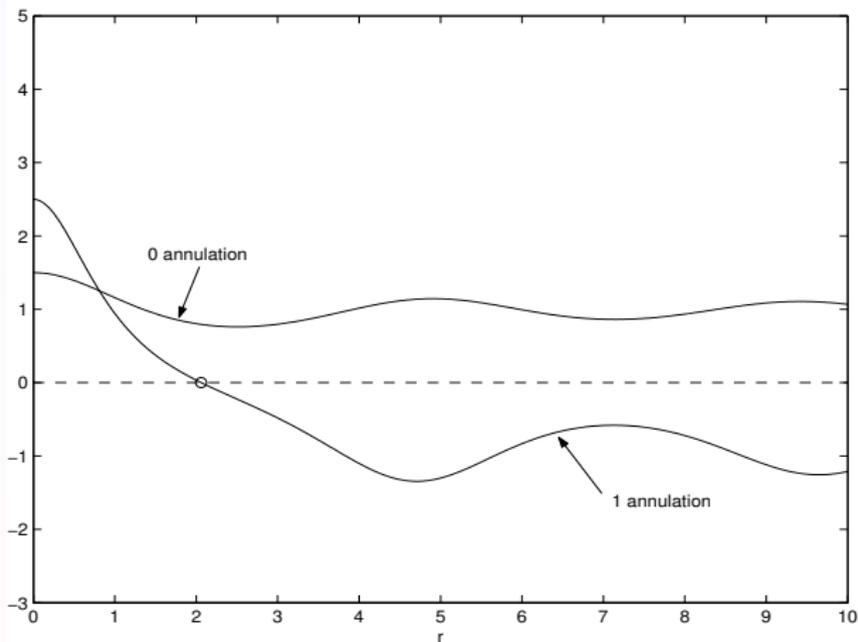
Permet d'obtenir par un algorithme de **dichotomie** pour  $d \geq 2$  les états  $u_k$  calculés sur un intervalle  $[0, R]$  ( $R \gg 1$ ).

# Structure des solutions de l'équation différentielle



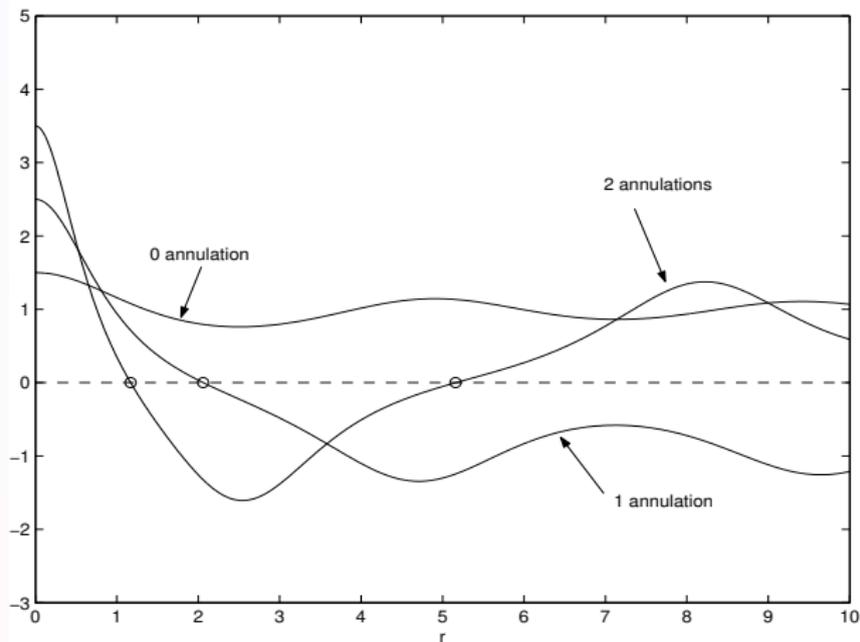
Le nombre de zéros de la solution **augmente** avec  $\beta$

# Structure des solutions de l'équation différentielle



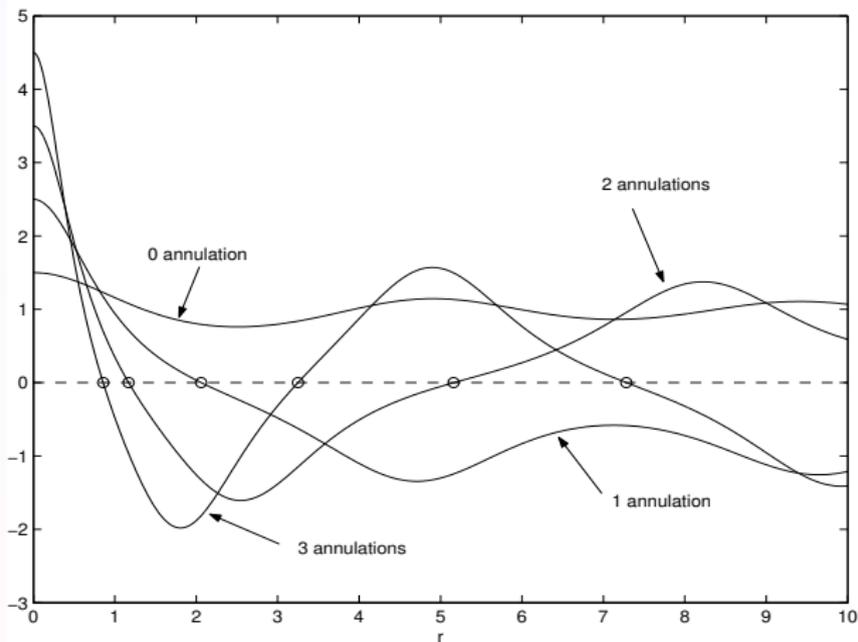
Le nombre de zéros de la solution **augmente** avec  $\beta$

# Structure des solutions de l'équation différentielle

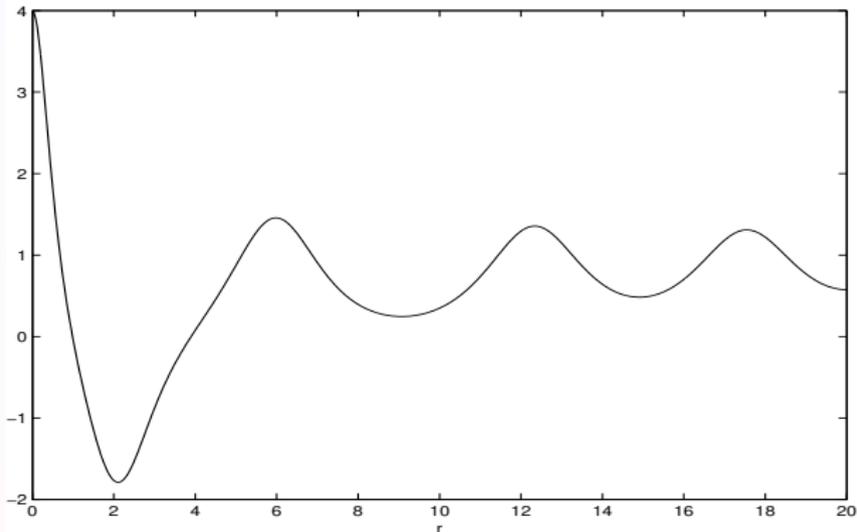


Le nombre de zéros de la solution **augmente** avec  $\beta$

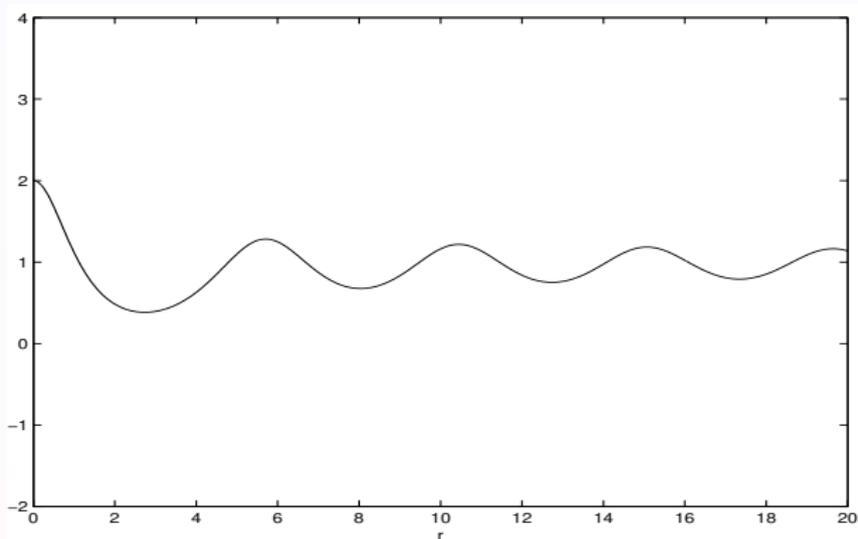
# Structure des solutions de l'équation différentielle



Le nombre de zéros de la solution **augmente** avec  $\beta$

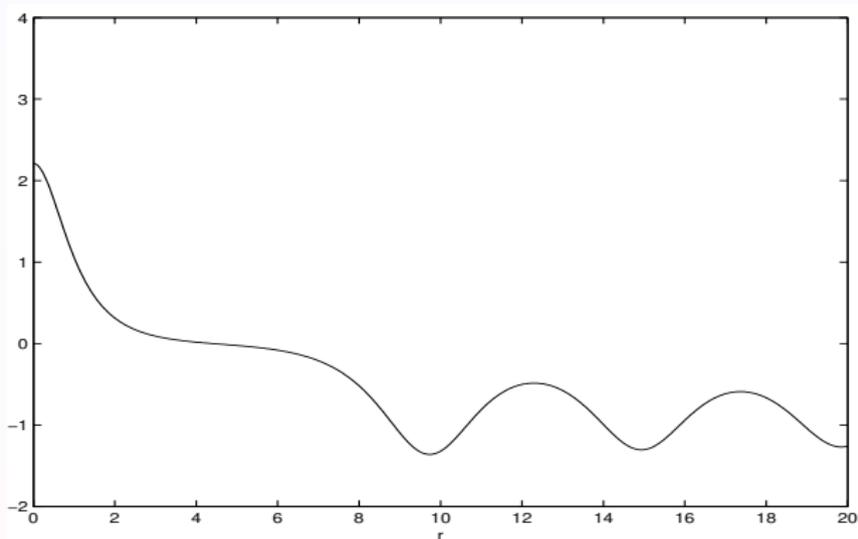
Exemple dans le cas  $k = 0$ ,  $d = 2$ ,  $\sigma = 1$ 

$\beta = 4$  : Trop grand !

Exemple dans le cas  $k = 0$ ,  $d = 2$ ,  $\sigma = 1$ 

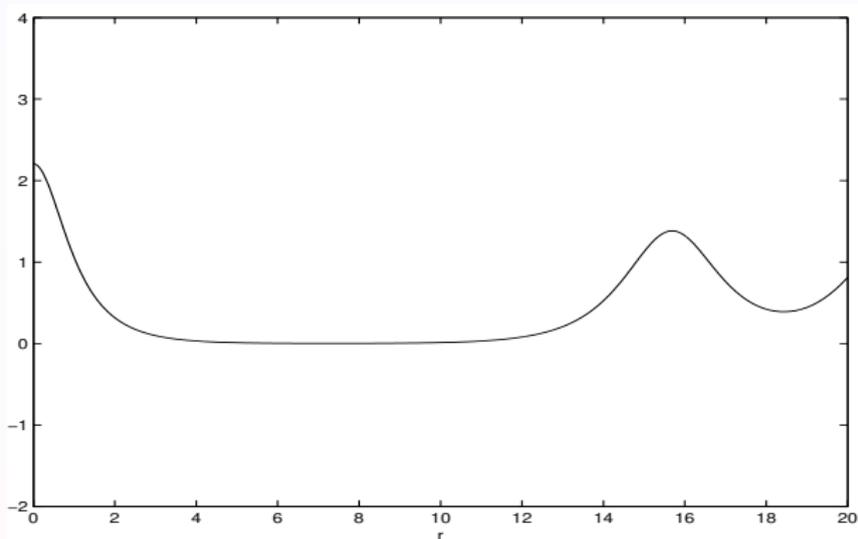
$\beta = 2$  : Trop petit !

# Exemple dans le cas $k = 0$ , $d = 2$ , $\sigma = 1$



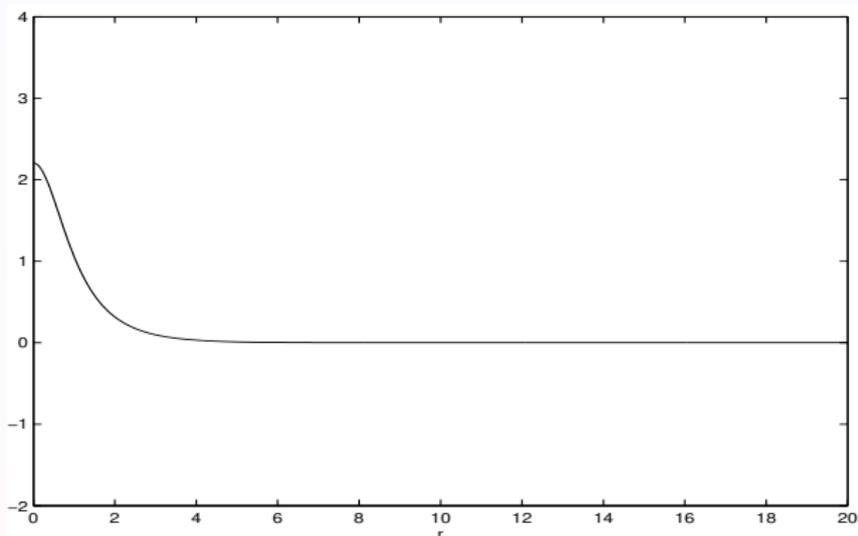
$\beta = 2.21$  : Trop grand !

# Exemple dans le cas $k = 0$ , $d = 2$ , $\sigma = 1$

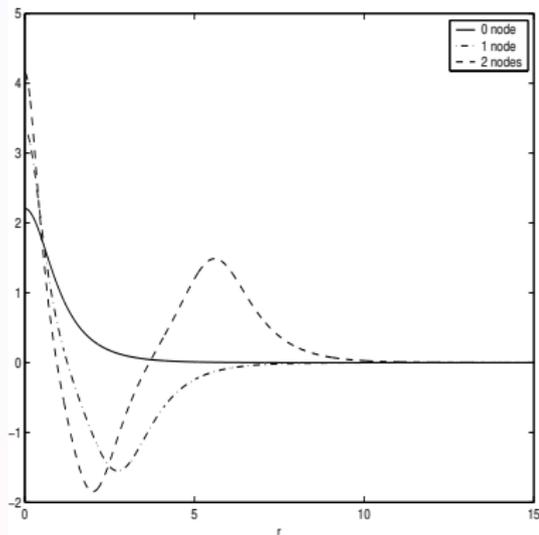
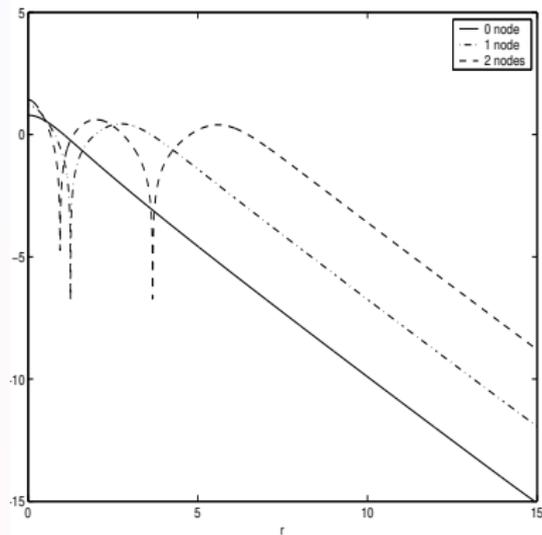


$\beta = 2.20617$  : Trop petit !

# Exemple dans le cas $k = 0$ , $d = 2$ , $\sigma = 1$



$\beta = 2.20620273691129$  : Correct sur  $[0, 20]$ .

Illustration, cas  $k = 0$ ,  $d = 2$ ,  $\sigma = 1$ Profil de  $u_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ .Profil de  $\log|u_k|$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

# Comportements asymptotiques

On s'intéresse aux régimes à grand **nombre de nœuds** ou bien à grande **non-linéarité** pour un nombre de nœuds fixé.

## Comportements asymptotiques

On s'intéresse aux régimes à grand **nombre de nœuds** ou bien à grande **non-linéarité** pour un nombre de nœuds fixé.

Après **beaucoup** de calculs, on obtient les

### Conjectures numériques

- Pour  $\sigma < 2/(d-2) := \sigma^*$ ,  $d \geq 2$ ,

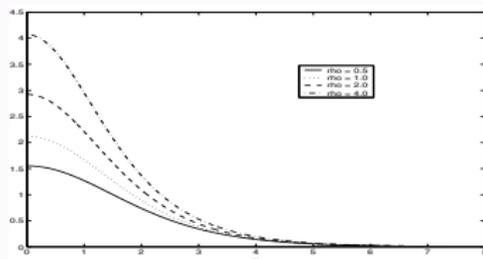
$$\|u_k\|_{L^\infty} \sim k^{\frac{1+\sigma^*/2}{\sigma^*-\sigma}} = k^{\frac{d-1}{2+\sigma(2-d)}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

- Pour  $d \geq 2$ , à  $k$  fixé

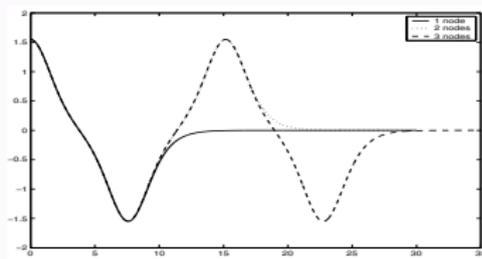
$$\|u_k\|_{L^\infty} \sim (\sigma^* - \sigma)^{-(\frac{1}{2}+k)}, \quad \sigma \rightarrow \sigma^*.$$

### 3. Modèles quadratiques : dimension 1

Utilisation de la méthode de tir précédente + condition de **localisation**  $u(0)^2 + \rho v(0)^2 - u(0)^2 v(0) = 0 \implies$  détermination d'**états excités**  $(u_k, v_k)$  dès la dimension 1 d'espace.



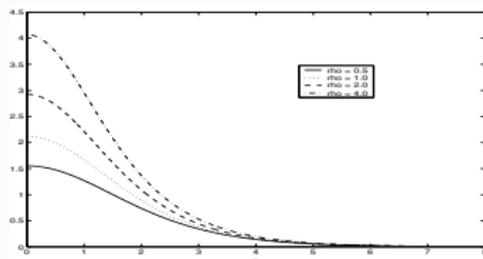
$u_0, \rho = 0.5, 1, 2$  et  $4.$



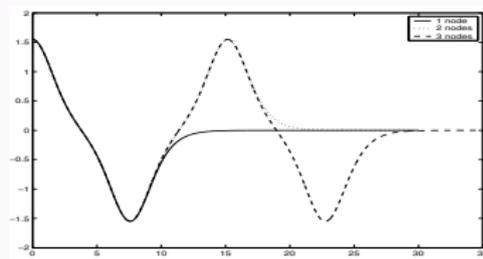
$u_k, 1 \leq k \leq 3.$

### 3. Modèles quadratiques : dimension 1

Utilisation de la méthode de tir précédente + condition de **localisation**  $u(0)^2 + \rho v(0)^2 - u(0)^2 v(0) = 0 \implies$  détermination d'**états excités**  $(u_k, v_k)$  dès la dimension 1 d'espace.



$u_0, \rho = 0.5, 1, 2$  et  $4$ .



$u_k, 1 \leq k \leq 3$ .

#### Observations :

- $(u_k, v_k) \rightarrow (u_*, v_*)$   $k \rightarrow +\infty$  (solution correspondante **périodique**).
- Pour  $k \geq 1$ , les états excités  $(u_k, v_k)$  n'existent pas lorsque  $\rho \geq 1$  et  $(u_k, v_k) \rightarrow (u_0, v_0)$  lorsque  $\rho \rightarrow 1$ .

## Modèles quadratiques : dimension supérieure

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(r) + \frac{d-1}{r} u'(r) - u(r) + u(r)v(r) = 0 \quad r > 0 \\ v''(r) + \frac{d-1}{r} v'(r) - \rho v(r) + \frac{1}{2} u^2(r) = 0 \quad r > 0 \\ u(0) = \alpha, \quad v(0) = \beta, \quad u'(0) = 0, \quad v'(0) = 0. \end{array} \right.$$

Problème : pas de relation entre  $\alpha$  et  $\beta$  pour avoir un état localisé.

## Modèles quadratiques : dimension supérieure

$$\begin{cases} u''(r) + \frac{d-1}{r}u'(r) - u(r) + u(r)v(r) = 0 & r > 0 \\ v''(r) + \frac{d-1}{r}v'(r) - \rho v(r) + \frac{1}{2}u^2(r) = 0 & r > 0 \\ u(0) = \alpha, v(0) = \beta, u'(0) = 0, v'(0) = 0. \end{cases}$$

Problème : pas de relation entre  $\alpha$  et  $\beta$  pour avoir un état localisé.

### Méthode de continuation :

Calcul des solutions en faisant varier **continûment** la dimension entre 1 et  $d$ , à partir des états stationnaires calculés en dimension 1 d'espace. Idée : dérivation par rapport à  $d$ .

## Modèles quadratiques : dimension supérieure

$$\begin{cases} u''(r) + \frac{d-1}{r}u'(r) - u(r) + u(r)v(r) = 0 & r > 0 \\ v''(r) + \frac{d-1}{r}v'(r) - \rho v(r) + \frac{1}{2}u^2(r) = 0 & r > 0 \\ u(0) = \alpha, v(0) = \beta, u'(0) = 0, v'(0) = 0. \end{cases}$$

Problème : pas de relation entre  $\alpha$  et  $\beta$  pour avoir un état localisé.

### Méthode de continuation :

Calcul des solutions en faisant varier **continûment** la dimension entre 1 et  $d$ , à partir des états stationnaires calculés en dimension 1 d'espace. Idée : dérivation par rapport à  $d$ .

### Exemple stupide :

Calcul de la solution de  $x^2(s) = s$  connaissant  $x(1) = 1$  : dérivation par rapport à  $s$  :  $\dot{x}(s) = 1/2x(s)$  et utilisation d'un solveur d'EDO.

## Modèles quadratiques : dimension supérieure

$$\begin{cases} u_s''(r) + \frac{s-1}{r} u_s'(r) - u_s(r) + u_s(r)v_s(r) = 0 & r > 0 \\ v_s''(r) + \frac{s-1}{r} v_s'(r) - \rho v_s(r) + \frac{1}{2} u_s^2(r) = 0 & r > 0 \\ u_s(0) = \alpha, v_s(0) = \beta, u_s'(0) = 0, v_s'(0) = 0. \end{cases}$$

Problème : pas de relation entre  $\alpha$  et  $\beta$  pour avoir un état localisé.

### Méthode de continuation :

Calcul des solutions en faisant varier **continûment** la dimension entre 1 et  $d$ , à partir des états stationnaires calculés en dimension 1 d'espace. Idée : dérivation par rapport à  $s$ .

### Exemple stupide :

Calcul de la solution de  $x^2(s) = s$  connaissant  $x(1) = 1$  : dérivation par rapport à  $s$  :  $\dot{x}(s) = 1/2x(s)$  et utilisation d'un solveur d'EDO.

## Continuation de paramètres

Point de départ : états  $(u_1, v_1)$  calculés en dimension 1 d'espace.

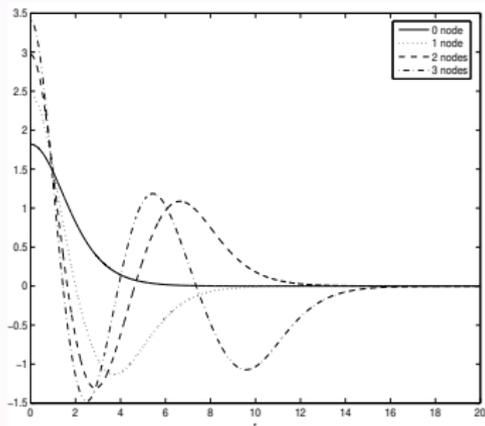
**Stratégie** : on suit un chemin entre 1 et  $d$  en dérivant par rapport au paramètre abstrait  $s$  ( $\dot{u}_s := du_s/ds$ ) :

$$\begin{cases} \dot{u}_s''(r) + \frac{s-1}{r} \dot{u}_s'(r) - \dot{u}_s(r) + u_s(r) \dot{v}_s(r) + v_s(r) \dot{u}_s(r) = -\frac{1}{r} u_s'(r) \\ \dot{v}_s''(r) + \frac{s-1}{r} \dot{v}_s'(r) - \rho \dot{v}_s(r) + u_s(r) \dot{u}_s(r) = -\frac{1}{r} v_s'(r). \end{cases}$$

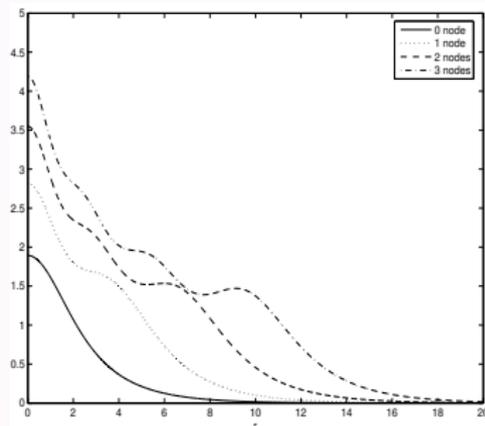
$(\dot{u}_s, \dot{v}_s)$  est calculé à partir de  $(u_s, v_s)$  en résolvant un **système elliptique linéaire couplé** (on écrit  $(\dot{u}_s, \dot{v}_s) = F((u_s, v_s))$ ). On obtient le système différentiel

$$\begin{cases} (\dot{u}_s, \dot{v}_s) & = F((u_s, v_s)), \quad s \in [1, d] \\ (u_s, v_s)|_{s=1} & = (u_1, v_1), \end{cases}$$

# Résultats en dimension 2 d'espace



$u_k$  ( $0 \leq k \leq 3$ ),  $\rho = 0.2$ ,  $d = 2$ .



$v_k$  ( $0 \leq k \leq 3$ ),  $\rho = 0.2$ ,  $d = 2$ .

## 4. Le freak, c'est chic

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + Kv = 0 \\ i \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + |v|^2 v + Ku = 0. \end{cases}$$

Soto-Crespo, Akhmediev (93) : description de la propagation d'ondes dans des **fibres optiques** couplées avec dispersion **temporelle**.

## 4. Le freak, c'est chic

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + Kv = 0 \\ i \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + |v|^2 v + Ku = 0. \end{cases}$$

Soto-Crespo, Akhmediev (93) : description de la propagation d'ondes dans des **fibres optiques** couplées avec dispersion **temporelle**.

Solutions stationnaires :  $u(z, t) = e^{i\omega z} u(t)$ ,  $v(z, t) = e^{i\omega z} v(t)$ , rescaling en  $t$  et en amplitude

$$\Rightarrow \begin{cases} -u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + \chi v = 0 \\ -v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + |v|^2 v + \chi u = 0, \quad \chi = K/\omega. \end{cases}$$

## Recherche d'états stationnaires

Comme pour le cas précédent, on recherche une relation de **localisation** donnant une condition nécessaire pour obtenir des solutions tendant vers zéro à l'infini. On obtient ici

$$u(0)^4 + v(0)^4 - 2(u(0)^2 + v(0)^2) + 4\chi u(0)v(0) = 0.$$

## Recherche d'états stationnaires

Comme pour le cas précédent, on recherche une relation de **localisation** donnant une condition nécessaire pour obtenir des solutions tendant vers zéro à l'infini. On obtient ici

$$u(0)^4 + v(0)^4 - 2(u(0)^2 + v(0)^2) + 4\chi u(0)v(0) = 0.$$

Le comportement qualitatif des solutions est **très différent** de celui déjà observé dans les deux cas précédents !

## Recherche d'états stationnaires

Comme pour le cas précédent, on recherche une relation de **localisation** donnant une condition nécessaire pour obtenir des solutions tendant vers zéro à l'infini. On obtient ici

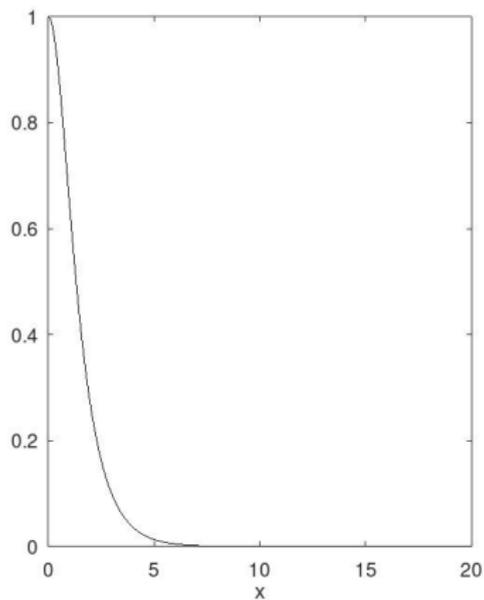
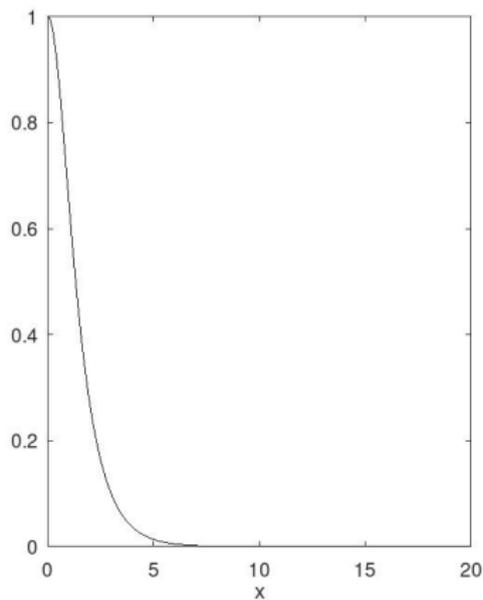
$$u(0)^4 + v(0)^4 - 2(u(0)^2 + v(0)^2) + 4\chi u(0)v(0) = 0.$$

Le comportement qualitatif des solutions est **très différent** de celui déjà observé dans les deux cas précédents !

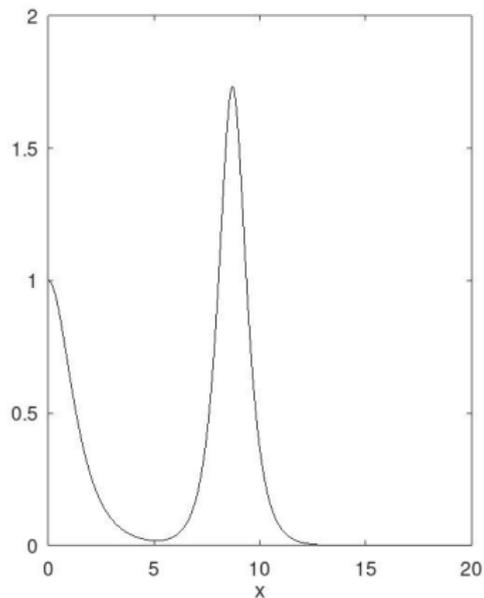
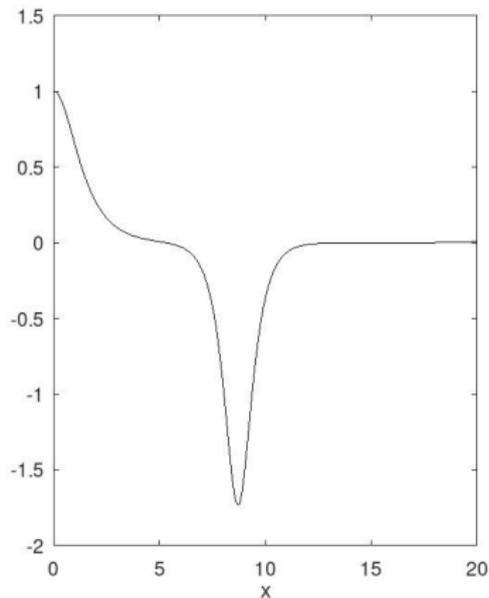
### En particulier :

- Les dérivées peuvent s'annuler **plus d'une fois** entre 2 annulations de  $u$  et  $v$  ;
- Le nombre d'annulations n'est pas une fonction **monotone** de l'amplitude  $u(0)$  !

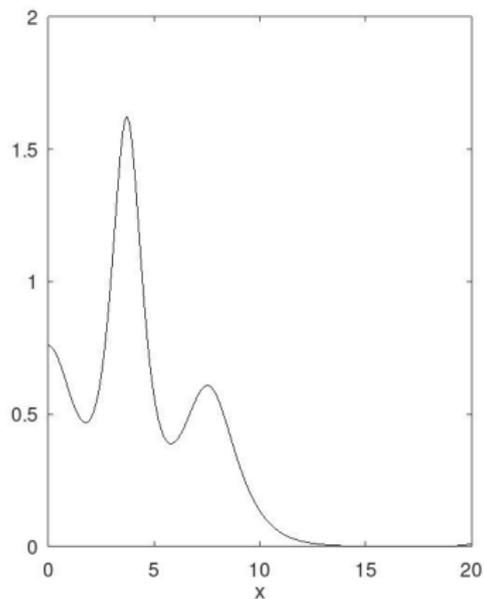
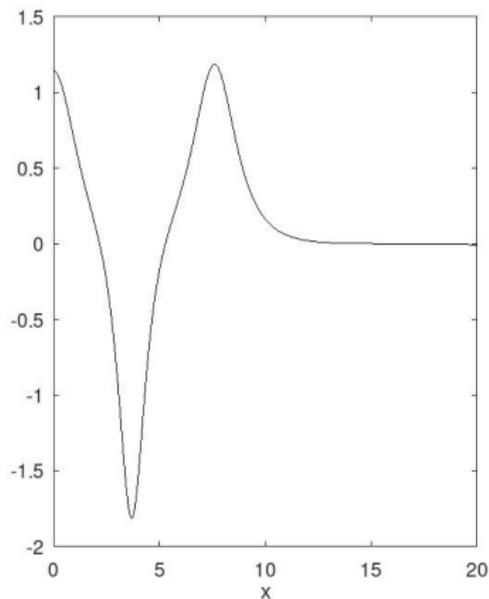
## Résultats obtenus : pas d'annulation



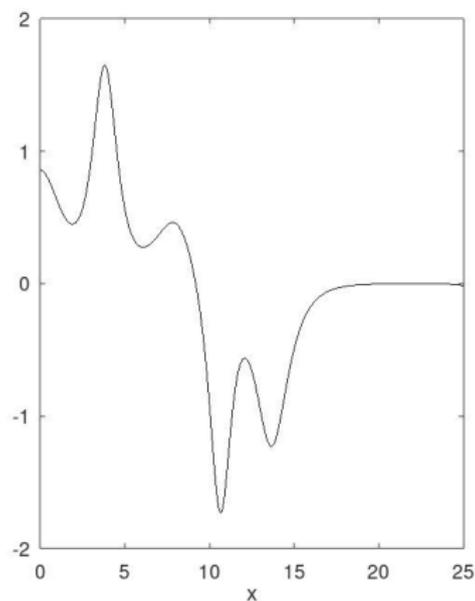
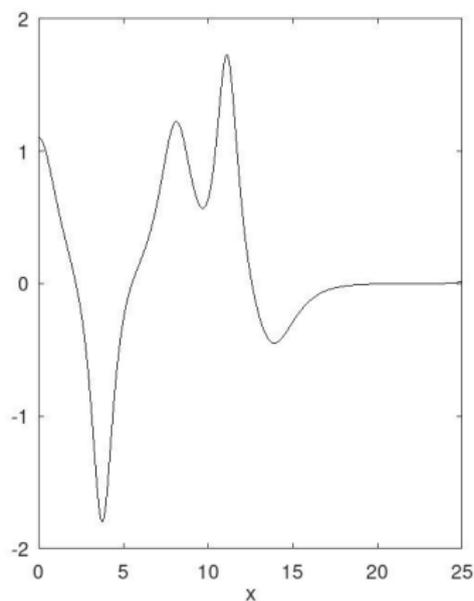
# Résultats obtenus : 1 annulation



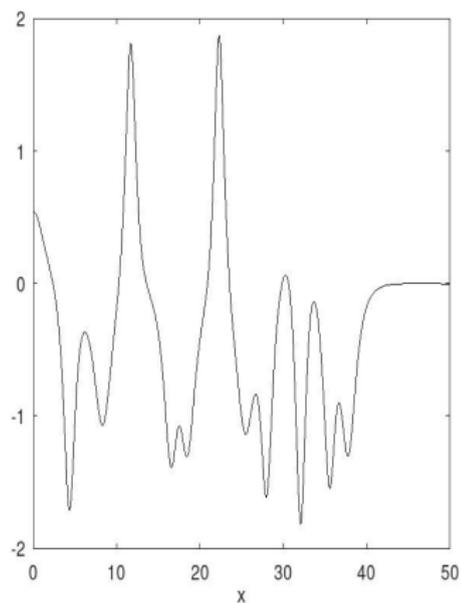
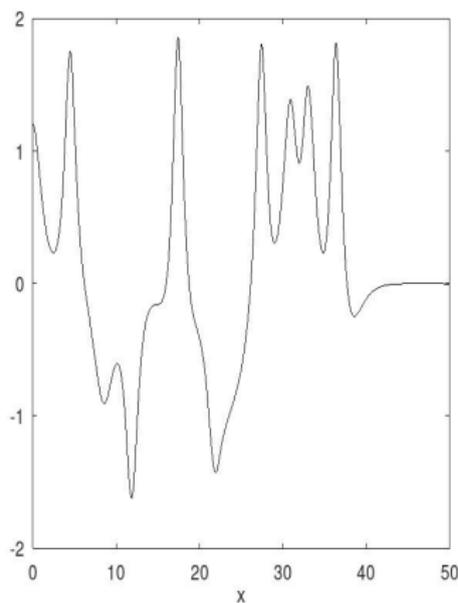
## Résultats obtenus : 2 annulations



# Résultats obtenus : 3 annulations



# Résultats obtenus : 5 annulations



## A suivre ?

- Lois asymptotiques pour une non-linéarité **générale**  $f(|\psi|^2)\psi$  ?  
On conjecture qu'il doit être possible d'obtenir des asymptotiques qui dépendront du comportement de  $f$  et de ses dérivées en 0.

## A suivre ?

- Lois asymptotiques pour une non-linéarité **générale**  $f(|\psi|^2)\psi$  ?  
On conjecture qu'il doit être possible d'obtenir des asymptotiques qui dépendront du comportement de  $f$  et de ses dérivées en 0.
- Comprendre la zoologie des **freak solitons** dans le cas des fibres optiques.

## A suivre ?

- Lois asymptotiques pour une non-linéarité **générale**  $f(|\psi|^2)\psi$  ?  
On conjecture qu'il doit être possible d'obtenir des asymptotiques qui dépendront du comportement de  $f$  et de ses dérivées en 0.
- Comprendre la zoologie des **freak solitons** dans le cas des fibres optiques.
- Calcul d'états stationnaires qui ne tendent pas vers zéro à l'infini (**black solitons**).

## A suivre ?

- Lois asymptotiques pour une non-linéarité **générale**  $f(|\psi|^2)\psi$  ?  
On conjecture qu'il doit être possible d'obtenir des asymptotiques qui dépendront du comportement de  $f$  et de ses dérivées en 0.
- Comprendre la zoologie des **freak solitons** dans le cas des fibres optiques.
- Calcul d'états stationnaires qui ne tendent pas vers zéro à l'infini (**black solitons**).
- Simulations en grand temps pour étudier des comportements asymptotiques et des questions de **stabilité** des états stationnaires.