

UNE MÉTHODE DE RECONSTRUCTION DE PERTURBATIONS PAR IMAGERIE MICRO-ONDES AVEC MESURES SURFACIQUES PARTIELLES

Jérémy HELEINE

SMAI 2023

Mardi 23 mai 2023

Un problème inverse de propagation d'onde

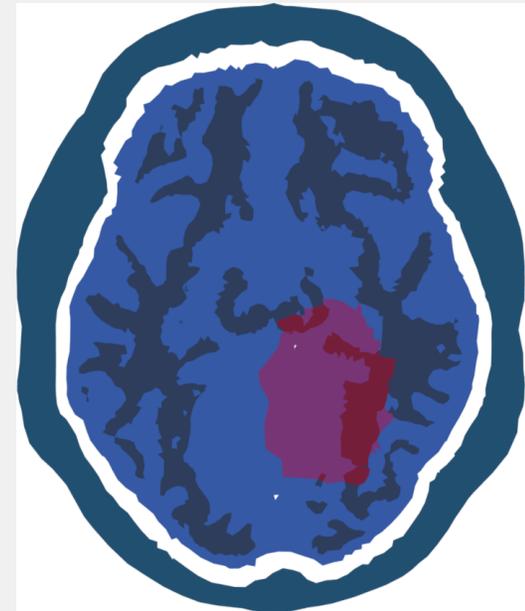
1. Envoi d'une onde de fréquence fixée vers l'objet à étudier.
2. Obtention de mesures (à la surface de l'objet) après propagation.
3. Inversion des mesures pour reconstruire des paramètres physiques du milieu à l'intérieur.

Recherche de perturbations

Des applications biomédicales sont envisagées pour l'imagerie micro-ondes, comme la caractérisation d'AVC ou la recherche de tumeurs.

But

Dans ce cadre, l'inversion consiste à reconstruire des perturbations à l'intérieur d'un milieu supposé connu.



- I. Problème direct et champ perturbé
- II. Équation de sensibilité itérée
- III. Test numérique

Problème direct et champ perturbé

Problème direct et champ perturbé

Équation de Maxwell

On considère Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$, de bord $\Gamma = \partial\Omega$ et de normale unitaire sortante \mathbf{n} .

On fixe un nombre d'onde k . L'indice de réfraction dans Ω est noté κ . On recherche le champ électrique $\mathbf{E}[\kappa]$ associé :

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{E}[\kappa] - k^2 \kappa \mathbf{E}[\kappa] & = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{curl} \mathbf{E}[\kappa] \times \mathbf{n} & = \mathbf{g}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où \mathbf{g} est la trace de Neumann de l'onde plane définie par :

$$\mathbf{E}: \mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\eta}^\perp e^{ik\sqrt{\kappa}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{x}}$$

avec $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$ et $\boldsymbol{\eta}^\perp$ un vecteur orthogonal.

Problème direct

Calculer $\mathbf{E}[\kappa] \times \mathbf{n}$ à partir d'un indice de réfraction κ donné.

Problème inverse

Reconstruire κ à partir de $\mathbf{E}[\kappa] \times \mathbf{n}$ connue sur au moins une partie de Γ .

Soit κ_0 une fonction de Ω donnée. On suppose que l'indice de réfraction recherché est une perturbation de cet indice de fond :

$$\kappa_a = \kappa_0(1 + a\chi_D)$$

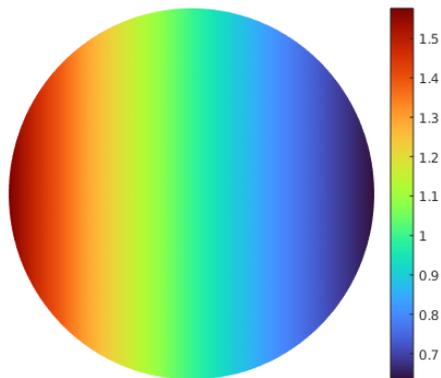
où a est l'amplitude de la perturbation et χ_D l'indicatrice de son support D .

Problème direct et champ perturbé

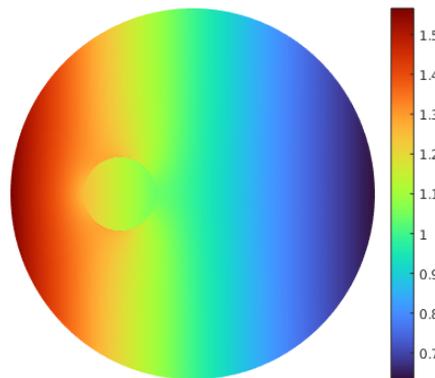
Champ perturbé

On peut supposer connu $\mathbf{E}[\kappa_0]$ le champ électrique associé à l'indice de réfraction de fond. On définit alors le champ perturbé :

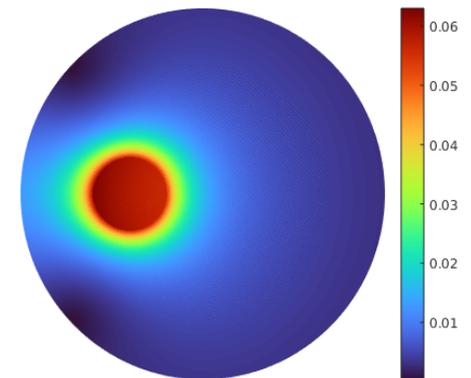
$$\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}[\kappa_a] - \mathbf{E}[\kappa_0].$$



Référence



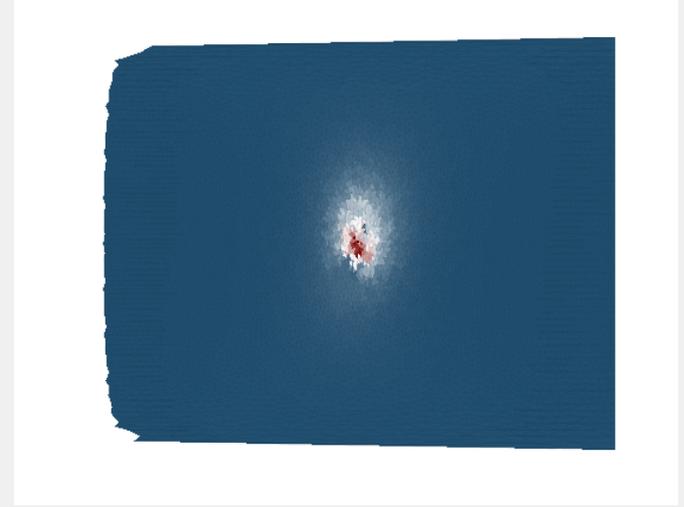
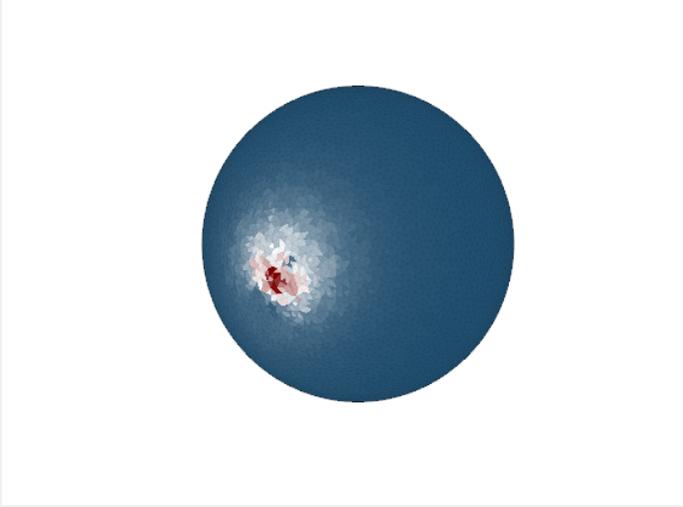
Perturbation



Champ perturbé

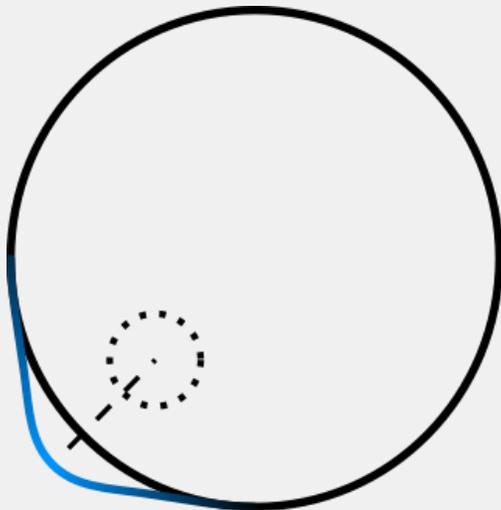
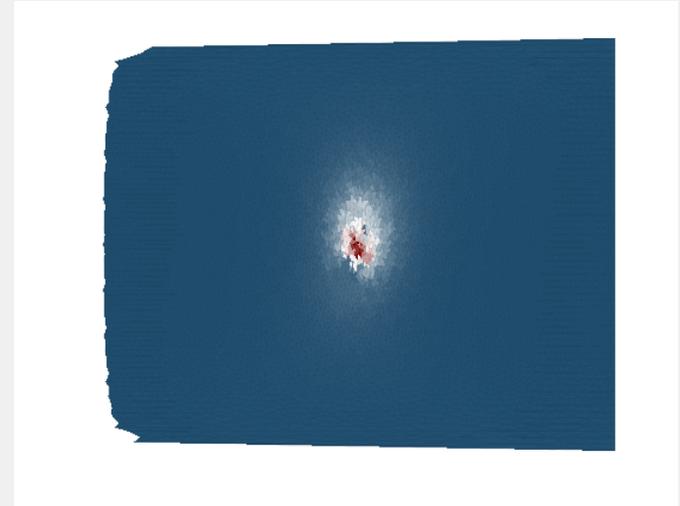
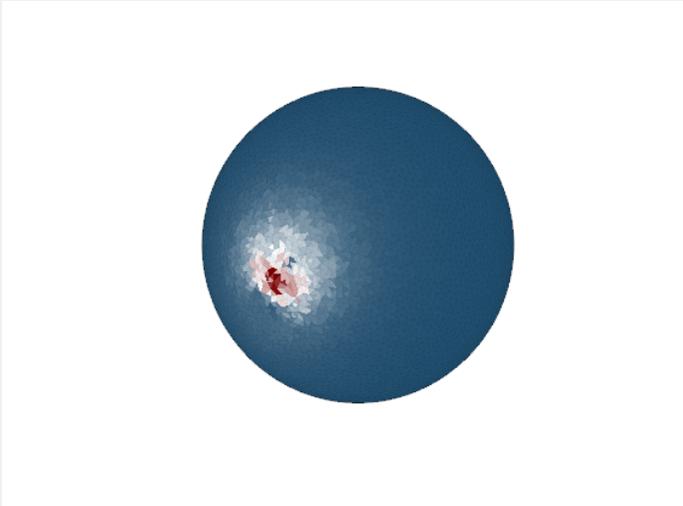
Problème direct et champ perturbé

Champ perturbé



Problème direct et champ perturbé

Champ perturbé



Résultat

L'information est localisée autour de la projection du centre de la perturbation.

Équation de sensibilité itérée

Définition

Soit $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ une application entre deux espaces de Banach. Soit $U \subset \mathcal{X}$ un ouvert. La dérivée de Gâteaux de F au point $x \in U$ dans la direction $\rho \in \mathcal{X}$ est la limite suivante :

$$D_{\rho}F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h\rho) - F(x)}{h}.$$

Si $D_{\rho}F(x)$ est bien définie pour toute direction $\rho \in \mathcal{X}$, et si $\rho \mapsto D_{\rho}F(x)$ est linéaire et continue, alors F est dite Gâteaux-différentiable en x .

Question

L'application $\kappa \mapsto \mathbf{E}[\kappa]$ est-elle Gâteaux-différentiable en κ_0 ?

Théorème

L'application $\kappa \mapsto \mathbf{E}[\kappa]$ est Gâteaux-différentiable en κ_0 . Sa dérivée $\mathbf{E}_D^{(1)}$ dans une direction χ_D est solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{E}_D^{(1)} - k^2 \kappa_0 \mathbf{E}_D^{(1)} & = k^2 \kappa_0 \chi_D \mathbf{E}[\kappa_0], & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{curl} \mathbf{E}_D^{(1)} \times \mathbf{n} & = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Théorème

L'application $\kappa \mapsto \mathbf{E}[\kappa]$ est indéfiniment Gâteaux-différentiable en κ_0 . Pour un certain support D , en notant $\mathbf{E}_D^{(0)} = \mathbf{E}[\kappa_0]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de $\mathbf{E}_D^{(n+1)}$ dans la direction χ_D est solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{E}_D^{(n+1)} - k^2 \kappa_0 \mathbf{E}_D^{(n+1)} &= (n+1) k^2 \kappa_0 \chi_D \mathbf{E}_D^{(n)}, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{curl} \mathbf{E}_D^{(n+1)} \times \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On en déduit un développement limité de $\mathbf{E}[\kappa_a]$ pour de faibles amplitudes a :

$$\mathbf{E}[\kappa_a] = \mathbf{E}[\kappa_0] + \sum_{n=1}^N \frac{a^n}{n!} \mathbf{E}_D^{(n)} + o(a^N),$$

pour $N \in \mathbb{N}$ quelconque.

Équation de sensibilité itérée

Une nouvelle fonctionnelle à minimiser

Pour un support de perturbation D donné, on peut écrire un développement limité du champ perturbé :

$$\delta \mathbf{E} = \sum_{n=1}^N \frac{a^n}{n!} \mathbf{E}_D^{(n)} + o(a^N).$$

Définition

On définit la fonctionnelle :

$$J: (D, a) \mapsto \frac{1}{2} \left\| \delta \mathbf{E} \times \mathbf{n} - \sum_{n=1}^N \frac{a^n}{n!} \mathbf{E}_D^{(n)} \times \mathbf{n} \right\|^2.$$

Si N est suffisamment grand, on s'attend à ce que J soit proche de zéro en les paramètres exacts de la perturbation recherchée.

On définit un difféomorphisme

$$\Psi: (h, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x} + h\mathbf{V}(\mathbf{x})$$

où \mathbf{V} est une fonction de \mathbb{R}^d vers \mathbb{R}^d déformant localement l'espace. Pour h suffisamment petit, on peut déformer le bord du support :

$$D_h = \Psi(h, D).$$

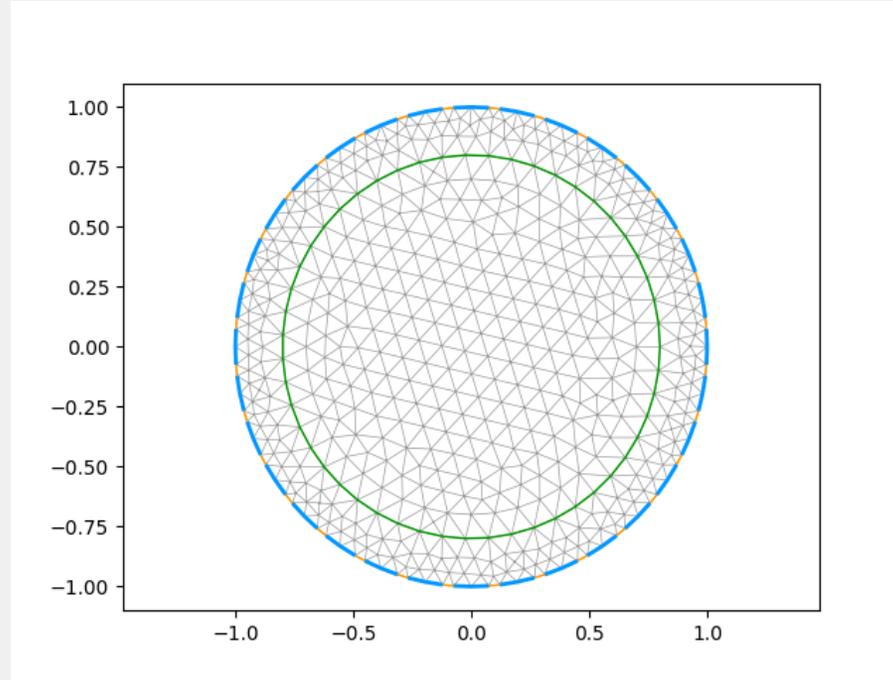
Proposition

Pour \mathbf{V} donnée, la dérivée de $\mathbf{E}_D^{(n+1)}$ par rapport à D vérifie :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{curl} \partial_D \mathbf{E}_D^{(n+1)} \cdot \mathbf{curl} \bar{\phi} - k^2 \int_{\Omega} \kappa_0 \partial_D \mathbf{E}_D^{(n+1)} \cdot \bar{\phi} \\ &= (n+1)k^2 \left(\int_D \kappa_0 \partial_D \mathbf{E}_D^{(n)} \cdot \bar{\phi} + \int_{\partial D} \kappa_0 (\mathbf{E}_D^{(n)} \cdot \bar{\phi}) \mathbf{V} \cdot \nu \right), \end{aligned}$$

où ν est la normale unitaire sortante de D .

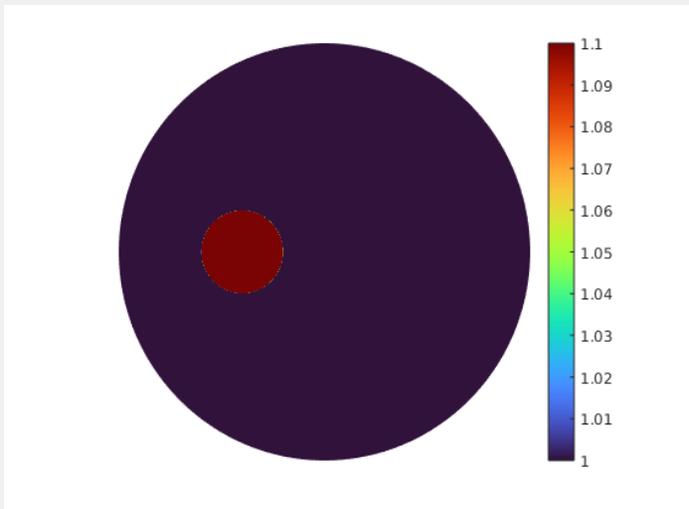
Test numérique



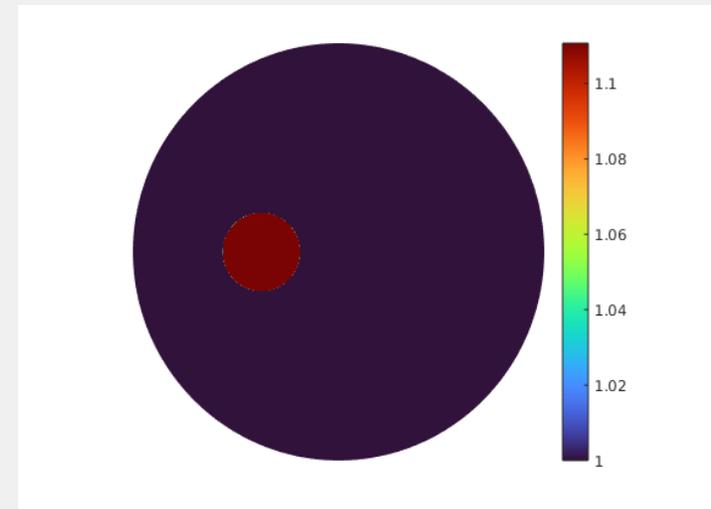
$$\omega = 1, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \mu_0 = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad \sigma = 1$$

Perturbation centrée en $(-0.4, 0)$, de rayon 0.2 et d'amplitude 0.1

Paramètre	Valeur attendue	Valeur retrouvée	Erreur
Projection	(-0.8, 0)	(-0.7999999391, -0.0009870864061)	0.1%
Profondeur	0.4	0.4244218947	6.11%
Rayon	0.2	0.1893716084	5.31%
Amplitude	0.1	0.110656802	10.66%



Indice exact



Indice reconstruit

Paramètre	Valeur attendue	Valeur retrouvée	Erreur
Projection	(-0.8, 0, 0)	(-0.7998742041, -0.01240988187, 0.006874042546)	1.77%
Profondeur	0.4	0.4031531359	0.79%
Rayon	0.2	0.2218085644	10.90%
Amplitude	0.5	0.3545507093	29.09%

Conclusion

Conclusion

- La linéarisation de la fonctionnelle d'écart aux données régularise le problème.
- La méthode peut s'adapter à la recherche de plusieurs perturbations, si elles sont suffisamment séparées.
- La généralisation à des formes plus complexes semble atteignable.
- La question d'une amplitude non constante reste ouverte.
- L'étape de complétion/transmission de données reste améliorable.

Merci de votre attention