

Modélisation mathématique des tumeurs en utilisant l'équation de Cahn-Hilliard

Charles ELBAR, LJLL, Sorbonne Université, CNRS, Université de Paris, Inria - Paris
Alexandre POULAIN, Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé - Lille

Nous présenterons une modélisation mathématique de l'évolution des tumeurs basée sur l'équation de Cahn-Hilliard. Ce modèle, initialement utilisé pour représenter mathématiquement la séparation des phases d'un alliage subissant un refroidissement soudain [1], trouve de nos jours une application dans la représentation mathématique et macroscopique de l'organisation des cellules cancéreuses en tumeurs (par exemple [3]). Plusieurs déclinaisons de ce modèle pour cette application particulière existent dans la littérature et comportent différents avantages et inconvénients tant du point de vue mathématique, numérique et applicatif. Nous passerons en revue certains de ces modèles et motiverons ainsi nos travaux.

Le coeur de la présentation abordera la dérivation étape par étape d'un modèle représentant la croissance d'une tumeur et l'invasion d'un tissu sain par la tumeur. Ce phénomène est d'un intérêt particulier car l'invasion du tissu sain par la tumeur est dans la majorité des cas un marqueur de mauvais pronostic. Nous proposerons donc un modèle très général combinant Navier-Stokes compressible et Cahn-Hilliard. Ce modèle permet d'y inclure les effets d'adhésion des cellules sur la matrice extracellulaire par un terme de friction. Nous verrons que le modèle Navier-Stokes-Cahn-Hilliard compressible général représente un véritable challenge en analyse et sa simulation numérique demande l'utilisation de nouvelles méthodes. Nous verrons certains de ces problèmes et les solutions que nous proposons [2].

Dans une dernière partie nous verrons une réduction de ce modèle très général qui ne prend en compte que les effets nécessaires à la formation des protrusions irrégulières couramment observées lors de l'invasion du tissu sain. Cela nous permettra d'émettre des hypothèses sur les effets mécaniques impliqués dans la formation de ces structures. Nous espérons à terme que nos travaux de modélisation, d'analyse et de simulation numérique pourront permettre de lever des verrous en oncologie grâce à la flexibilité que présentent les modèles mathématiques.

- [1] J. W. Cahn, J. E. Hilliard. *Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy*. J. Chem. Phys., **28(2)**, 258–267, 1958. doi :10.1063/1.1744102.
- [2] C. Elbar, A. Poulain. *Analysis and structure preserving numerical scheme of a generalized compressible cahn-hilliard-navier-stokes model with friction forces*, 2023. In preparation.
- [3] S. M. Wise, J. S. Lowengrub, H. B. Frieboes, V. Cristini. *Three-dimensional multispecies nonlinear tumor growth—I : Model and numerical method*. J. Theor. Biol., **253(3)**, 524–543, 2008. doi : 10.1016/j.jtbi.2008.03.027.