

Tomographie électromagnétique pour le génie civil

Théau COUSIN, LMI - ENDSUM - Rouen **Antoine TONNOIR**, LMI - Rouen
Cyrille FAUCHARD, ENDSUM Cerema - Rouen **Christian GOUT**, LMI - Rouen

Dans cet exposé nous allons revisiter des méthodes mathématiques associées à la tomographie électromagnétique (EM), permettant de retrouver la permittivité de différents matériaux du génie civil. Cette permittivité peut être reliée à la densitométrie grâce au modèle de CRIM¹. Ce travail s'inscrit dans le contexte d'un partenariat avec Routes de France, dont l'objectif est de remplacer la méthode nucléaire pour mesurer la densitométrie des routes par une approche moins coûteuse. Plus précisément, un banc EM multi-fréquences basé sur l'émission et réception d'ondes a été conçu, permettant de scanner des carottages de routes et ainsi s'assurer de leur bonne construction.

Modélisation

Pour décrire la propagation des ondes EM nous utilisons les équations classiques de Maxwell en formulation ordre 2². La source d'émission \underline{s}^f est considérée suffisamment loin pour la modéliser comme une onde plane incidente. Cela conduit à résoudre comme problème direct :

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E}^f - k_f^2 \varepsilon \underline{E}^f = \underline{s}^f$$

pour une fréquence f donnée. Une approche par éléments finis (Nédélec) est utilisée afin de résoudre cette équation.

Données

Les données mesurées par le banc EM sont appelés **paramètres S** et indexés par $l = f + n_f r$, i.e. $\underline{S}^{\text{mes}} \in \mathbb{C}^{n_f \times n_r}$. Elles nécessitent un étalonnage réalisé à partir de la relation³ :

$$\underline{S}^{\text{mes}, e} = \frac{\underline{S}^{\text{mes}}}{\underline{S}^{\text{mes}} (H_{f_1} + H_{f_2}) + H_{t_1} H_{r_2}}$$

avec H_{f_i} , H_{t_i} et H_{r_i} les **fonctions de transfert** de perte, transmission et réception associées à l'antenne i . On a la relation entre le champ simulé et son paramètre S associé : $S_i^{\text{sim}} = \underline{E}^f(\underline{x}_r) \cdot \underline{P}$.

Inversion

Soit $\underline{\mathcal{F}} : \varepsilon \in \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \underline{S}^{\text{sim}} \in \mathbb{C}^{n_f \times n_r}$, on pose :

$$\mathcal{C}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \|\underline{S}^{\text{mes}} - \underline{\mathcal{F}}(\varepsilon)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \varepsilon\|_2^2$$

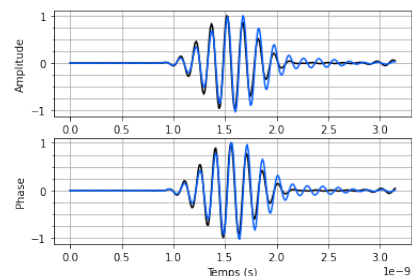
Pour **minimiser** ce problème, on applique une méthode itérative de type Gauss-Newton :

- * **linéariser** $\underline{\mathcal{F}}$ au voisinage de $\underline{\varepsilon}^{(k)}$
- * Déterminer la mise à jour $\delta \underline{\varepsilon}^{(k)}$, solution de :

$$\min_{\delta \underline{\varepsilon}^{(k)}} \left(\|\underline{S}^{\text{mes}, c} - \underline{S}^{\text{sim}} - \underline{\mathcal{J}} \underline{\mathcal{F}}(\varepsilon) \delta \underline{\varepsilon}^{(k)}\| + \|\nabla \varepsilon\| \right)$$

L'inversion est réalisée progressivement à partir de sous intervalles de la bande passante de fréquences, permettant de prendre en compte l'interaction taille objet / longueur d'onde λ dans le critère de régularisation de **Tikhonov**^{4 5} $\|\nabla \varepsilon\|$.

Résultat



Paramètre \underline{S} simulé (bleu) et mesuré (noir) en temporel pour une coupe horizontale d'un tube rempli de sable ($\underline{\varepsilon}_{\text{sable}} \in [2.5 ; 3.5]$) et une B-P de $[2.8 ; 6.6]$ GHz.

Contact : theau.cousin@insa-rouen.fr

1. C. FAUCHARD ET. AL., *Estimat. of compact of bitume mixtures at microwave freq.*, 7ème Symp Int sur les ENDGC, 2009.
2. P. MONK, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford Eds, ISBN 9780198508885, 2003.
3. S. LAMBOT ET. AL., *Model. of GPR for accurate char. of subsurface elec. prop.*, IEEE Geoscience, 42, 2004.
4. A. TARANTOLA, *Inverse Problem Theory*, Society for Ind and Applied Math, ISBN :978-0-89871-572-9, 2005.
5. A.N. TIKHONOV ET. AL., *Solutions of ill-posed problems*, John Wiley & Sons Inc Eds, ISBN 9780470991244, 1977.