Limites continues d'approximations non locales pour l'équation Eikonale sur des variétés

Nicolas FORCADEL, Normandie Univ, INSA de Rouen, LMI - Rouen
Rita ZANTOUT, Normandie Univ, INSA de Rouen, LMI - Rouen
Jalal FADILI, Normandie Univ, ENSICAEN, CNRS, GREYC - Caen

Dans cet exposé on considère des approximations non-locales de l'équation Eikonale dépendant du temps de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + H(x, \nabla f(x,t)) = 0, & (x,t) \in \mathcal{M} \backslash \Gamma \times]0,T[, \\ f(x,t) = f_0(x), & (x,t) \in (\Gamma \times]0,T[) \cup \mathcal{M} \times \{0\}, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

où $\mathcal{M}$ est une variété Riemannienne, $T^*\mathcal{M}$ est le fibré cotangent, $\nabla f(x,t)$ est la différentielle de la fonction f par rapport à la variable d'espace x et $H : \mathcal{M} \times T^*\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ est le Hamiltonian défini par

$$H(x, \nabla f(x,t)) = \|\nabla f(x,t)\|_x - P(x).$$

Plus précisement, on considère l'équation Eikonale non-locale de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f^\varepsilon(x,t) + H_d(x, \nabla^-_{\eta_\varepsilon} f^\varepsilon(x,t)) = 0, & (x,t) \in (\widetilde{\mathcal{M}} \backslash \tilde{\Gamma}) \times]0,T[, \\ f^\varepsilon(x,t) = f^\varepsilon_0(x), & (x,t) \in (\tilde{\Gamma} \times]0,T[) \cup \widetilde{\mathcal{M}} \times \{0\}, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

où $\widetilde{\mathcal{M}}$ est un ensemble de points de $\mathcal{M}$ tel que $\max_{x\in\mathcal{M}} d_{\mathcal{M}}(x, \widetilde{\mathcal{M}}) = O(\varepsilon)$. On définit l'hamiltonian

$$H_d(x, \nabla^-_{\eta_\varepsilon} f^\varepsilon(x,t)) = \left|\nabla^-_{\eta_\varepsilon} f^\varepsilon(x,t)\right|_\infty - \tilde{P}(x),$$

avec

$$\left|\nabla^-_{\eta_\varepsilon} f^\varepsilon(x,t)\right|_\infty = \max_{y\in\tilde{M}} J_\varepsilon(x,y)(f^\varepsilon(x,t) - f^\varepsilon(y,t)),$$

et J_ε est un noyau correctement mis à l'échelle. Nous montrons l'existence et l'unicité des solutions pour les problèmes local et non-local, ainsi que des propriétés de régularité de ces solutions par rapport au temps et à l'espace. Nous calculons ensuite des bornes d'erreur entre la solution du problème local et celle du problème non-local, à la fois en temps continu et en temps discrétisé par Euler explicite. Ensuite, nous étudions les limites continues du problème non-local défini sur des graphes pondérés aléatoirement avec n sommets. En particulier, nous montrons que si le paramètre d'échelle du noyau diminue à un taux approprié alors, presque sûrement, la solution du problème sur les graphes converge uniformément vers la solution de viscosité du problème local lorsque le pas de temps tend vers 0 et le nombre de sommets n tend vers l'infini.

Contact : rita.zantout@insa-rouen.fr