

## Schémas d'ordre arbitraire positifs pour la diffusion sur maillage quelconque

**Xavier BLANC**, Laboratoire Jacques-Louis Lions - Université de Paris Cité  
**François HERMELINE**, CEA, DAM, DIF - F-91297 Arpajon, France  
**Emmanuel LABOURASSE**, CEA, DAM, DIF - F-91297 Arpajon, France  
**Julie PATELA**, CEA, DAM, DIF - F-91297 Arpajon, France

Dans cet exposé, on s'intéresse à la résolution du problème

$$\begin{cases} \alpha u - \nabla \cdot \kappa \nabla u = f & \text{dans } \Omega, \\ \gamma \kappa \nabla \bar{u} \cdot \mathbf{n} + \delta \bar{u} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec  $\kappa > 0, \alpha > 0, \gamma \geq 0, \delta \geq 0$  et  $\gamma$  et  $\delta$  non nuls en même temps sur le bord.

Il est connu que cette équation admet une solution positive sous les conditions  $f \geq 0, g \geq 0$  [3]. Les méthodes numériques préservant cette propriété au niveau discret sont dites monotones ou positives.

La positivité est fondamentale pour nos applications car  $u$  est par exemple une température ou une concentration. Nous avons proposé un schéma en 1D [1] qui permet de préserver la positivité tout en étant d'ordre arbitraire en espace. Pour autant que nous le sachions, il s'agit du premier schéma qui respecte ces deux propriétés. Nous avons montré que ces schémas sont conservatifs et monotones, au prix de la linéarité du schéma. La non-linéarité est résolue grâce à un point fixe. Sous une hypothèse de stabilité, nous avons également montré la convergence à un ordre correspondant au degré de la reconstruction. Ces schémas peuvent également être symétrisés, ce qui induit en outre la structure LMP [2] (Linear Maximum Preserving) du schéma. Ces schémas sont aussi adaptés dans le cas d'un coefficient  $\kappa$  discontinu.

Dans cet exposé, j'explique comment étendre notre schéma 1D monotone d'ordre de précision quelconque en 2D d'espace. Nous proposons donc une famille de schémas volumes finis d'ordre arbitraire qui préserve la positivité et qui prend en compte de possibles discontinuités du coefficient  $\kappa$ .

Cette souche de schémas est implantée en C++ dans une plateforme ouverte du CEA afin de pouvoir valider cette approche.

- [1] X. Blanc, E. Labourasse, F. Hermeline, J. Patela. *High-order monotone finite-volume schemes for 1d elliptic problems*. HAL, 2021.
- [2] J. Droniou, C. L. Potier. *Construction and convergence study of schemes preserving the elliptic local maximum principle*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [3] L. Evans. *Application of nonlinear semigroup theory to certain partial differential equations*. Non-linear Evolution Equations, pp. 163–188, 1978.