



Tomographie électromagnétique pour le génie civil

Théau COUSIN^{1,2,3}, Antoine TONNOIR¹, Cyrille FAUCHARD², Christian GOUT¹

23 mai 2023

¹LMI - INSA Rouen

²ENDSUM - Cerema

³Routes de France

Contexte et objectifs



CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Les routes coûtent chères à construire (millions d'€ par km) et sont soumises à d'importants efforts (climat, trafic, etc..).

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Les routes coûtent chères à construire (millions d'€ par km) et sont soumises à d'importants efforts (climat, trafic, etc..).
- * Vérification après la réception (notamment la **compacité**).

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Les routes coûtent chères à construire (millions d'€ par km) et sont soumises à d'importants efforts (climat, trafic, etc..).
- * Vérification après la réception (notamment la **compacité**).
- * Pesée hydrostatique, Banc gamma

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

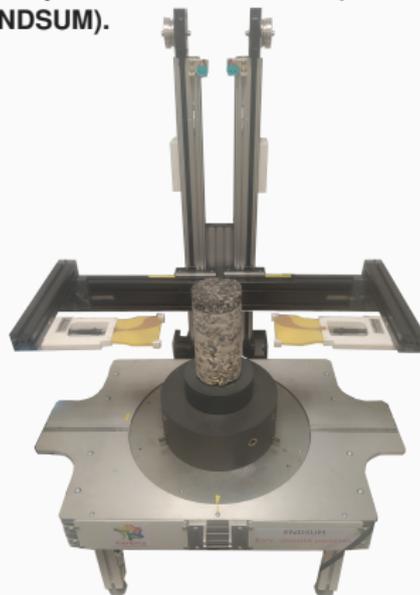
- * Les routes coûtent chères à construire (millions d'€ par km) et sont soumises à d'importants efforts (climat, trafic, etc..).
- * Vérification après la réception (notamment la **compacité**).
- * Pesée hydrostatique, Banc gamma
Mesure globale Source nucléaire

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Les routes coûtent chères à construire (millions d'€ par km) et sont soumises à d'importants efforts (climat, trafic, etc..).
- * Vérification après la réception (notamment la **compacité**).

- * Pesée hydrostatique, Banc gamma
Mesure globale Source nucléaire

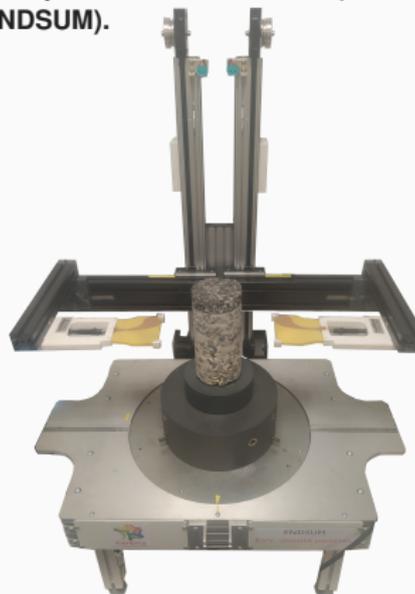


Banc électromagnétique

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Les routes coûtent chères à construire (millions d'€ par km) et sont soumises à d'importants efforts (climat, trafic, etc..).
- * Vérification après la réception (notamment la **compacité**).
- * Pesée hydrostatique, Banc gamma
Mesure globale Source nucléaire
- * Intérêts de la permittivité ainsi que du modèle de CRIM¹.



Banc électromagnétique

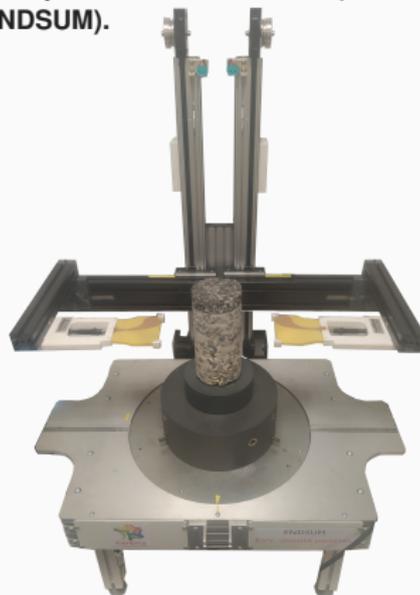
¹ C. FAUCHARD, *Estimation of compaction of bituminous mixtures at microwave frequencies*, 7ème Symp Int sur les ENDGC, (2009)

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Les routes coûtent chères à construire (millions d'€ par km) et sont soumises à d'importants efforts (climat, trafic, etc..).
- * Vérification après la réception (notamment la **compacité**).
- * Pesée hydrostatique, Banc gamma
Mesure globale Source nucléaire
- * Intérêts de la **permittivité** ainsi que du modèle de CRIM¹.
- * Simulation de la **diffraction d'ondes électromagnétiques** \implies Équations de Maxwell :

$$\left| \begin{array}{l} \nabla \times \underline{\mathcal{E}} = -\underline{M}_i - \partial_t \underline{\mathcal{B}} \\ \nabla \times \underline{\mathcal{H}} = \underline{S}_i + \partial_t \underline{\mathcal{D}} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}} = q_{ev} \\ \nabla \cdot \underline{\mathcal{B}} = 0 \end{array} \right.$$



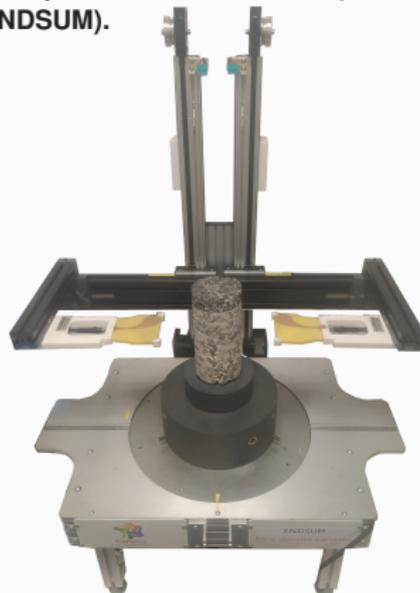
Banc électromagnétique

¹ C. FAUCHARD, *Estimation of compaction of bituminous mixtures at microwave frequencies*, 7ème Symp Int sur les ENDGC, (2009)

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Remplacer définitivement le banc gamma

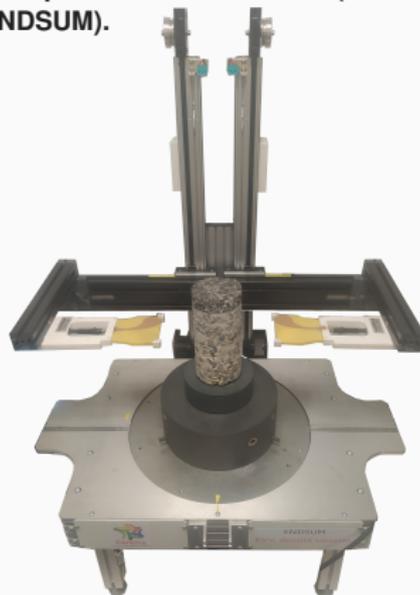


Banc électromagnétique

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Remplacer définitivement le banc gamma
- * Caractériser le comportement diélectrique de tout matériau

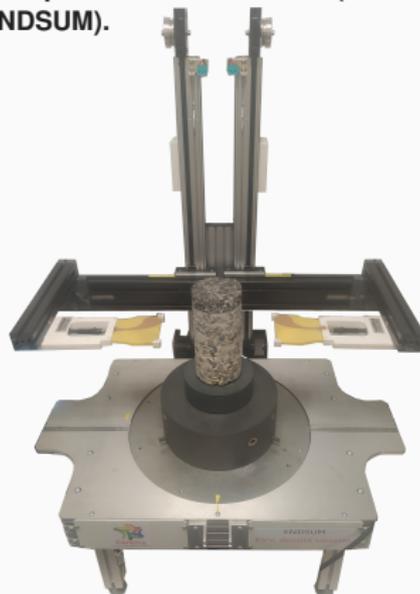


Banc électromagnétique

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Remplacer définitivement le banc gamma
- * Caractériser le comportement diélectrique de tout matériau
- * Application à différents domaines scientifiques

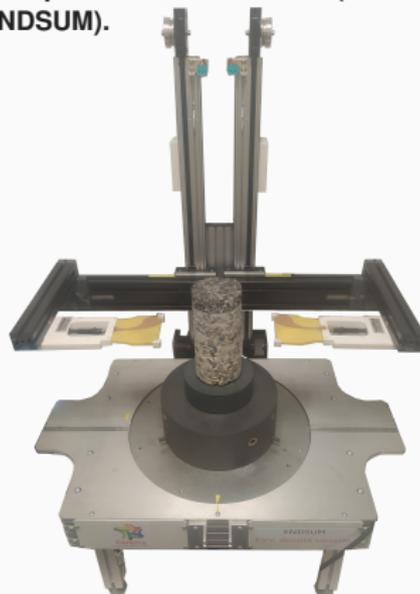


Banc électromagnétique

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Remplacer définitivement le banc gamma
- * Caractériser le comportement diélectrique de tout matériau
- * Application à différents domaines scientifiques
- * Modélisation du problème physique

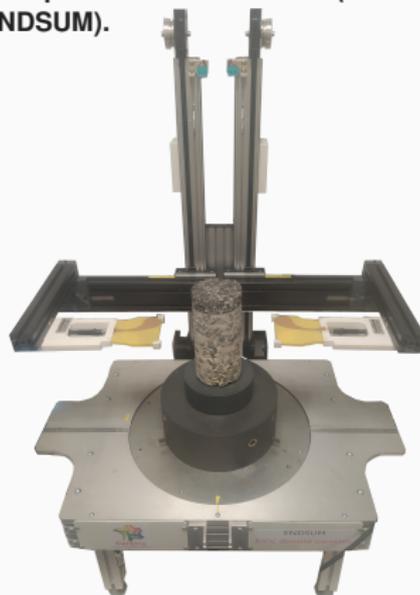


Banc électromagnétique

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Remplacer définitivement le banc gamma
- * Caractériser le comportement diélectrique de tout matériau
- * Application à différents domaines scientifiques
- * Modélisation du problème physique
- * Milieu dispersif, simulation d'un domaine non borné

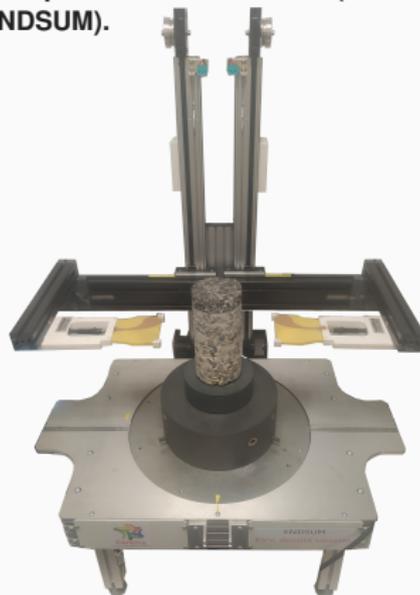


Banc électromagnétique

CONTEXTE ET OBJECTIFS

Thèse en contrat CIFRE financée par Routes de France, en partenariat avec le LMI (INSA - Rouen) et le Cerema (équipe ENDSUM).

- * Remplacer définitivement le banc gamma
- * Caractériser le comportement diélectrique de tout matériau
- * Application à différents domaines scientifiques
- * Modélisation du problème physique
- * Milieu dispersif, simulation d'un domaine non borné
- * Formulation des problèmes directs et de l'inversion



Banc électromagnétique

Modélisation

ÉQUATIONS DE MAXWELL

Nous cherchons à discrétiser les équations de Maxwell pour le régime harmonique en formulation ordre 2, à savoir :

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \underline{E} - k_0^2 \varepsilon \underline{E} = 0} \quad (1)$$

avec \underline{E} le champ électrique, $k_0 = \omega c_0^{-1}$ et ε la permittivité relative.

ÉQUATIONS DE MAXWELL

Nous cherchons à discrétiser les équations de Maxwell pour le régime harmonique en formulation ordre 2, à savoir :

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \underline{E} - k_0^2 \varepsilon \underline{E} = 0} \quad (1)$$

avec \underline{E} le champ électrique, $k_0 = \omega c_0^{-1}$ et ε la permittivité relative.

Problème de diffraction par ondes sphériques :

ÉQUATIONS DE MAXWELL

Nous cherchons à discrétiser les équations de Maxwell pour le régime harmonique en formulation ordre 2, à savoir :

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \underline{E} - k_0^2 \varepsilon \underline{E} = 0} \quad (1)$$

avec \underline{E} le champ électrique, $k_0 = \omega c_0^{-1}$ et ε la permittivité relative.

Problème de diffraction par ondes sphériques :

On considère un champ total \underline{E}^t comme étant la somme d'un champ incident \underline{E}^i et d'un champ diffracté \underline{E}^s . L'équation devient alors :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \underline{E}^t - k_0^2 \varepsilon \underline{E}^t &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla \times \nabla \times \underline{E}^s - k_0^2 \varepsilon \underline{E}^s &= k_0^2 (\varepsilon - 1) \underline{E}^i \end{aligned}$$

pour un champ incident \underline{E}^i de la forme $\nabla \times \Phi$ avec Φ solution de (1) pour $\varepsilon = 1$, i.e. $\Phi = H_0(k_0 r)$.

ÉQUATIONS DE MAXWELL

Nous cherchons à discrétiser les équations de Maxwell pour le régime harmonique en formulation ordre 2, à savoir :

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} - k_0^2 \varepsilon \underline{E} = 0 \quad (1)$$

avec \underline{E} le champ électrique, $k_0 = \omega c_0^{-1}$ et ε la permittivité relative.

Problème de diffraction par ondes sphériques :

On considère un champ total \underline{E}^t comme étant la somme d'un champ incident \underline{E}^i et d'un champ diffracté \underline{E}^s . L'équation devient alors :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \underline{E}^t - k_0^2 \varepsilon \underline{E}^t &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla \times \nabla \times \underline{E}^s - k_0^2 \varepsilon \underline{E}^s &= k_0^2 (\varepsilon - 1) \underline{E}^i \end{aligned}$$

pour un champ incident \underline{E}^i de la forme $\nabla \times \Phi$ avec Φ solution de (1) pour $\varepsilon = 1$, i.e. $\Phi = H_0(k_0 r)$. Le problème est ensuite discrétisé par une approche éléments finis, basée sur les éléments de Nédélec¹:

$$\left[\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\varepsilon) \right] \underline{\mathcal{C}}(\varepsilon) = \underline{\mathcal{S}}(\varepsilon)$$

avec $\underline{E}^s = \underline{\mathcal{O}} \underline{\mathcal{C}}(\varepsilon)$, $\underline{\mathcal{O}}$ un opérateur permettant de reconstruire la solution.

¹ P. MONK, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Numer. Analysis, (2005).

PARAMÈTRES S

- * L'inversion est réalisée à partir des données de l'analyseur, à savoir les paramètres S (scattering parameters, rapport entre le champ reçu et le champ émis).

² S. LAMBOT, *Model. of GPR for accurate char. of subsurface elec. prop.*, IEEE Geoscience, 42, (2004).

PARAMÈTRES S

- * L'inversion est réalisée à partir des données de l'analyseur, à savoir les paramètres S (scattering parameters, rapport entre le champ reçu et le champ émis).
- * Dans notre cas, nous avons la relation entre le champ \underline{E} simulé et le paramètre S associé (S_{21}) :

$$S_{21}^{sim} = \langle \underline{E}^{sim}, \underline{P} \rangle$$

avec \underline{P} un vecteur de polarisation permettant de prendre en compte la rotation des antennes.

² S. LAMBOT, *Model. of GPR for accurate char. of subsurface elec. prop.*, IEEE Geoscience, 42, (2004).

PARAMÈTRES S

- * L'inversion est réalisée à partir des données de l'analyseur, à savoir les paramètres S (scattering parameters, rapport entre le champ reçu et le champ émis).
- * Dans notre cas, nous avons la relation entre le champ \underline{E} simulé et le paramètre S associé (S_{21}) :

$$S_{21}^{sim} = \langle \underline{E}^{sim}, \underline{P} \rangle$$

avec \underline{P} un vecteur de polarisation permettant de prendre en compte la rotation des antennes.

- * Il est également nécessaire de calibrer les antennes², afin de pouvoir inverser correctement sur les paramètres S :

$$S_{21}^{mes, c} = S_{21}^{mes} \left(S_{21}^{mes} \left(H_{f1} + H_{f2} \right) + H_{t1} H_{r2} \right)^{-1}$$

avec H_{f_i} , H_{t_i} et H_{r_i} les fonctions de transfert de perte, transmission et réception associées à l'antenne i .

² S. LAMBOT, *Model. of GPR for accurate char. of subsurface elec. prop.*, IEEE Geoscience, 42, (2004).

PROCESSUS D'INVERSION MULTI-FRÉQUENTIEL

- * Inversion sur un intervalle de fréquences.

PROCESSUS D'INVERSION MULTI-FRÉQUENTIEL

- * Inversion sur un intervalle de fréquences.
- * Données \underline{d}^{mes} : Paramètre S au récepteur selon l'orientation de l'objet et la fréquence f .

PROCESSUS D'INVERSION MULTI-FRÉQUENTIEL

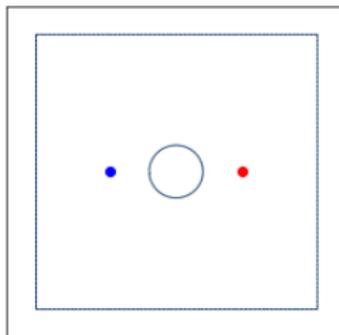
- * Inversion sur un intervalle de fréquences.
- * Données \underline{d}^{mes} : Paramètre S au récepteur selon l'orientation de l'objet et la fréquence f .
- * Données \underline{d}^{sim} : Paramètre S au récepteur selon la source s et la fréquence f :

$$d_l = S^{s, f}, l = f + sn_f$$

PROCESSUS D'INVERSION MULTI-FRÉQUENTIEL

- * Inversion sur un intervalle de fréquences.
- * Données \underline{d}^{mes} : Paramètre S au récepteur selon l'orientation de l'objet et la fréquence f .
- * Données \underline{d}^{sim} : Paramètre S au récepteur selon la source s et la fréquence f :

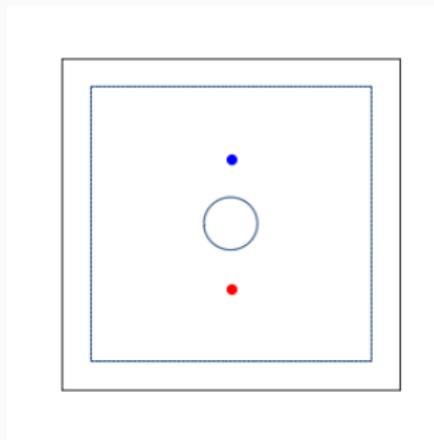
$$d_l = S^{s, f}, l = f + sn_f$$



PROCESSUS D'INVERSION MULTI-FRÉQUENTIEL

- * Inversion sur un intervalle de fréquences.
- * Données \underline{d}^{mes} : Paramètre S au récepteur selon l'orientation de l'objet et la fréquence f .
- * Données \underline{d}^{sim} : Paramètre S au récepteur selon la source s et la fréquence f :

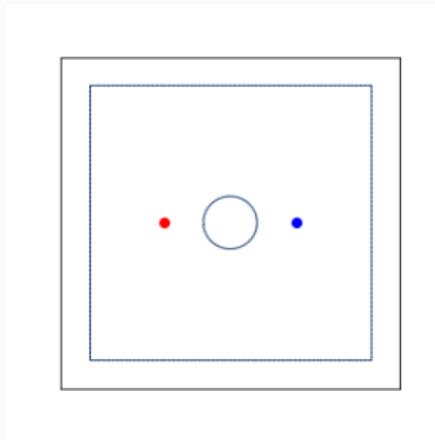
$$d_l = S^{s, f}, l = f + sn_f$$



PROCESSUS D'INVERSION MULTI-FRÉQUENTIEL

- * Inversion sur un intervalle de fréquences.
- * Données \underline{d}^{mes} : Paramètre S au récepteur selon l'orientation de l'objet et la fréquence f .
- * Données \underline{d}^{sim} : Paramètre S au récepteur selon la source s et la fréquence f :

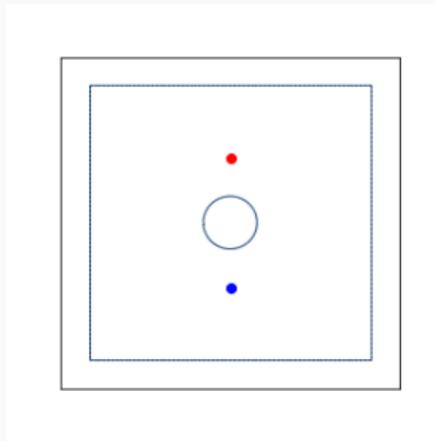
$$d_l = S^{s, f}, l = f + sn_f$$



PROCESSUS D'INVERSION MULTI-FRÉQUENTIEL

- * Inversion sur un intervalle de fréquences.
- * Données \underline{d}^{mes} : Paramètre S au récepteur selon l'orientation de l'objet et la fréquence f .
- * Données \underline{d}^{sim} : Paramètre S au récepteur selon la source s et la fréquence f :

$$d_l = S^{s, f}, l = f + sn_f$$



APPROXIMATION DE GAUSS-NEWTON

On cherche à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{M}(\underline{\varepsilon}^*) = \min_{\underline{\varepsilon}} \frac{1}{2} \|\underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})\|^2 + \frac{1}{2} \|\underline{\nabla \varepsilon}\|^2$$

avec $\underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$ la fonction associée au problème direct, i.e. $\underline{\mathcal{F}} : \underline{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{n_m} \rightarrow \underline{d}^{sim} \in \mathbb{C}^{n_d}$. Posons $\underline{r}(\underline{\varepsilon}) = \underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$, la résolution se fait par une approche de type Newton :

APPROXIMATION DE GAUSS-NEWTON

On cherche à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{M}(\underline{\varepsilon}^*) = \min_{\underline{\varepsilon}} \frac{1}{2} \|\underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})\|^2 + \frac{1}{2} \|\underline{\nabla} \underline{\varepsilon}\|^2$$

avec $\underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$ la fonction associée au problème direct, i.e. $\underline{\mathcal{F}} : \underline{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{n_m} \rightarrow \underline{d}^{sim} \in \mathbb{C}^{n_d}$. Posons $\underline{r}(\underline{\varepsilon}) = \underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$, la résolution se fait par une approche de type Newton :

- * Déterminer $\underline{\varepsilon}^*$ par la résolution de

$$\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}) = 0$$

APPROXIMATION DE GAUSS-NEWTON

On cherche à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{M}(\underline{\varepsilon}^*) = \min_{\underline{\varepsilon}} \frac{1}{2} \|\underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})\|^2 + \frac{1}{2} \|\underline{\nabla \varepsilon}\|^2$$

avec $\underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$ la fonction associée au problème direct, i.e. $\underline{\mathcal{F}} : \underline{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{n_m} \rightarrow \underline{d}^{sim} \in \mathbb{C}^{n_d}$. Posons $\underline{r}(\underline{\varepsilon}) = \underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$, la résolution se fait par une approche de type Newton :

- * Déterminer $\underline{\varepsilon}^*$ par la résolution de

$$\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}) = 0$$

- * Itération sur $\underline{\varepsilon}$ pour arriver à la solution optimal $\underline{\varepsilon}^*$ avec :

$$\underline{\varepsilon}^{k+1} = \underline{\varepsilon}^k + \underline{\delta \varepsilon}$$

APPROXIMATION DE GAUSS-NEWTON

On cherche à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{M}(\underline{\varepsilon}^*) = \min_{\underline{\varepsilon}} \frac{1}{2} \|\underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})\|^2 + \frac{1}{2} \|\underline{\nabla \varepsilon}\|^2$$

avec $\underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$ la fonction associée au problème direct, i.e. $\mathcal{F} : \underline{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{n_m} \rightarrow \underline{d}^{sim} \in \mathbb{C}^{n_d}$. Posons $\underline{r}(\underline{\varepsilon}) = \underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$, la résolution se fait par une approche de type Newton :

- * Déterminer $\underline{\varepsilon}^*$ par la résolution de

$$\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}) = 0$$

- * Itération sur $\underline{\varepsilon}$ pour arriver à la solution optimal $\underline{\varepsilon}^*$ avec :

$$\underline{\varepsilon}^{k+1} = \underline{\varepsilon}^k + \underline{\delta \varepsilon}$$

- * Pour $\underline{\delta \varepsilon}$, on applique une méthode de type Newton-Raphson à $\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon})$:

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}''(\underline{\varepsilon}^k) \underline{\delta \varepsilon} = -\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}^k)$$

APPROXIMATION DE GAUSS-NEWTON

On cherche à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{M}(\underline{\varepsilon}^*) = \min_{\underline{\varepsilon}} \frac{1}{2} \|\underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})\|^2 + \frac{1}{2} \|\underline{\nabla \varepsilon}\|^2$$

avec $\underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$ la fonction associée au problème direct, i.e. $\underline{\mathcal{F}} : \underline{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{n_m} \rightarrow \underline{d}^{sim} \in \mathbb{C}^{n_d}$. Posons $\underline{r}(\underline{\varepsilon}) = \underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$, la résolution se fait par une approche de type Newton :

- * Déterminer $\underline{\varepsilon}^*$ par la résolution de

$$\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}) = 0$$

- * Itération sur $\underline{\varepsilon}$ pour arriver à la solution optimal $\underline{\varepsilon}^*$ avec :

$$\underline{\varepsilon}^{k+1} = \underline{\varepsilon}^k + \underline{\delta \varepsilon}$$

- * Pour $\underline{\delta \varepsilon}$, on applique une méthode de type Newton-Raphson à $\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon})$:

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}''(\underline{\varepsilon}^k) \underline{\delta \varepsilon} = -\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}^k)$$

- * $\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}^k) = (\underline{r}')^t \underline{r}$, avec $\underline{r}'(\underline{\varepsilon}) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\varepsilon}}$, i.e. la jacobienne associée au vecteur \underline{r} notée $\underline{\mathcal{J}}$.

APPROXIMATION DE GAUSS-NEWTON

On cherche à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{M}(\underline{\varepsilon}^*) = \min_{\underline{\varepsilon}} \frac{1}{2} \|\underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})\|^2 + \frac{1}{2} \|\underline{\nabla \varepsilon}\|^2$$

avec $\underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$ la fonction associée au problème direct, i.e. $\underline{\mathcal{F}} : \underline{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{n_m} \rightarrow \underline{d}^{sim} \in \mathbb{C}^{n_d}$. Posons $\underline{r}(\underline{\varepsilon}) = \underline{d}^{mes} - \underline{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon})$, la résolution se fait par une approche de type Newton :

- * Déterminer $\underline{\varepsilon}^*$ par la résolution de

$$\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}) = 0$$

- * Itération sur $\underline{\varepsilon}$ pour arriver à la solution optimal $\underline{\varepsilon}^*$ avec :

$$\underline{\varepsilon}^{k+1} = \underline{\varepsilon}^k + \underline{\delta \varepsilon}$$

- * Pour $\underline{\delta \varepsilon}$, on applique une méthode de type Newton-Raphson à $\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon})$:

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}''(\underline{\varepsilon}^k) \underline{\delta \varepsilon} = -\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}^k)$$

- * $\mathcal{M}'(\underline{\varepsilon}^k) = (\underline{r}')^t \underline{r}$, avec $\underline{r}'(\underline{\varepsilon}) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\varepsilon}}$, i.e. la jacobienne associée au vecteur \underline{r} notée $\underline{\mathcal{J}}$.

- * On approche $\mathcal{M}''(\underline{\varepsilon}^k)$ par :

$$\mathcal{M}''(\underline{\varepsilon}^k) = \underline{\mathcal{J}}^t \underline{\mathcal{J}} + \underline{r}^t \underline{\mathcal{J}}' \simeq \underline{\mathcal{J}}^t \underline{\mathcal{J}}$$

Justifié par une approximation raisonnable au voisinage de l'optimum $\underline{\varepsilon}^*$.

MÉTHODE D'ÉTATS ADJOINTS

Le calcul de \mathcal{J} se fait par la méthode d'**états adjoints**³ :

³  M. BONNET, *Identification et inversion*, Équipe POEMS, ENSTA Paris, (2020)

MÉTHODE D'ÉTATS ADJOINTS

Le calcul de $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$ se fait par la méthode d'**états adjoints**³ :

* $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$ dépend de \underline{c} et donc de $\underline{\varepsilon}$. Sa dérivée composée s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{c}} \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\varepsilon}} = \langle \underline{r}'_1, \underline{c}'(\underline{\varepsilon}) \rangle$$

³  M. BONNET, *Identification et inversion*, Équipe POEMS, ENSTA Paris, (2020)

MÉTHODE D'ÉTATS ADJOINTS

Le calcul de $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$ se fait par la méthode d'états adjoints³ :

- * $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$ dépend de \underline{c} et donc de $\underline{\varepsilon}$. Sa dérivée composée s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{c}} \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\varepsilon}} = \langle \underline{r}'_1, \underline{c}'(\underline{\varepsilon}) \rangle$$

- * On approche \underline{c}' par $\underline{\delta \varepsilon} \underline{c}'(\underline{\varepsilon}) = \underline{c}(\underline{\varepsilon} + \underline{\delta \varepsilon}) - \underline{c}(\underline{\varepsilon})$, ce qui nous mène à :

$$\underline{c}'(\underline{\varepsilon}) = \left(\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\underline{\varepsilon}) \right)^{-1} \left(\underline{\mathcal{S}}'(\underline{\varepsilon}) - k_0^2 \mathbb{M}'(\underline{\varepsilon}) \underline{c}(\underline{\varepsilon}) \right)$$

³  M. BONNET, *Identification et inversion*, Équipe POEMS, ENSTA Paris, (2020)

MÉTHODE D'ÉTATS ADJOINTS

Le calcul de $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$ se fait par la méthode d'**états adjoints**³ :

- * $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$ dépend de \underline{c} et donc de $\underline{\varepsilon}$. Sa dérivée composée s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{c}} \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\varepsilon}} = \langle \underline{r}'_1, \underline{c}'(\underline{\varepsilon}) \rangle$$

- * On approche \underline{c}' par $\underline{\delta \varepsilon} \underline{c}'(\underline{\varepsilon}) = \underline{c}(\underline{\varepsilon} + \underline{\delta \varepsilon}) - \underline{c}(\underline{\varepsilon})$, ce qui nous mène à :

$$\underline{c}'(\underline{\varepsilon}) = \left(\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\underline{\varepsilon}) \right)^{-1} \left(\underline{\mathcal{S}}'(\underline{\varepsilon}) - k_0^2 \mathbb{M}'(\underline{\varepsilon}) \underline{c}(\underline{\varepsilon}) \right)$$

- * On retrouve alors :

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}}(\underline{\varepsilon}) = \langle \tilde{\underline{c}}(\underline{\varepsilon}), \underline{\mathcal{S}}'(\underline{\varepsilon}) - k_0^2 \mathbb{M}'(\underline{\varepsilon}) \underline{c}(\underline{\varepsilon}) \rangle$$

avec $\tilde{\underline{c}}(\underline{\varepsilon})$ solution du **problème adjoint** suivant :

$$\left(\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\underline{\varepsilon}) \right)^t \tilde{\underline{c}}(\underline{\varepsilon}) = \underline{r}'_1$$

³  M. BONNET, *Identification et inversion*, Équipe POEMS, ENSTA Paris, (2020)

ALGORITHME D'INVERSION

Pour une itération k :

ALGORITHME D'INVERSION

Pour une itération k :

- Résolution du problème direct :

$$\left[\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) \right] \underline{c}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) = \underline{\mathcal{S}}(\underline{\varepsilon})$$

ALGORITHME D'INVERSION

Pour une itération k :

- Résolution du problème direct :

$$\left[\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) \right] \underline{c}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) = \underline{\mathcal{S}}(\underline{\varepsilon})$$

- Construction des données $\underline{r} = \underline{d}^{mes, c} - \underline{d}^{sim}$.

ALGORITHME D'INVERSION

Pour une itération k :

- Résolution du problème direct :

$$\left[\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) \right] \underline{c}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) = \underline{\mathcal{S}}(\underline{\varepsilon})$$

- Construction des données $\underline{r} = \underline{d}^{mes, c} - \underline{d}^{sim}$.
- Si la norme de \underline{r} est supérieur à l'erreur autorisée :

ALGORITHME D'INVERSION

Pour une itération k :

- Résolution du problème direct :

$$\left[\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) \right] \underline{c}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) = \underline{\mathcal{S}}(\underline{\varepsilon})$$

- Construction des données $\underline{r} = \underline{d}^{mes, c} - \underline{d}^{sim}$.
- Si la norme de \underline{r} est supérieur à l'erreur autorisée :

- * Construction de la matrice $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}} = \langle \underline{\tilde{c}}(\underline{\varepsilon}), \underline{\mathcal{S}}'(\underline{\varepsilon}) - k_0^2 \mathbb{M}'(\underline{\varepsilon}) \underline{c}(\underline{\varepsilon}) \rangle$$

ALGORITHME D'INVERSION

Pour une itération k :

- Résolution du problème direct :

$$\left[\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) \right] \underline{c}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) = \underline{\mathcal{S}}(\underline{\varepsilon})$$

- Construction des données $\underline{r} = \underline{d}^{mes, c} - \underline{d}^{sim}$.
- Si la norme de \underline{r} est supérieur à l'erreur autorisée :

- * Construction de la matrice $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}} = \langle \underline{\tilde{c}}(\underline{\varepsilon}), \underline{\mathcal{S}}'(\underline{\varepsilon}) - k_0^2 \mathbb{M}'(\underline{\varepsilon}) \underline{c}(\underline{\varepsilon}) \rangle$$

- * Résolution du système

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}}^t \underline{\underline{\mathcal{J}}} \underline{\delta \varepsilon} + \underline{\underline{\mathcal{J}}}^t \underline{r} = 0$$

ALGORITHME D'INVERSION

Pour une itération k :

- Résolution du problème direct :

$$\left[\mathbb{K} - k_0^2 \mathbb{M}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) \right] \underline{c}(\underline{\varepsilon}^{(k)}) = \underline{\mathcal{S}}(\underline{\varepsilon})$$

- Construction des données $\underline{r} = \underline{d}^{mes, c} - \underline{d}^{sim}$.
- Si la norme de \underline{r} est supérieur à l'erreur autorisée :

- * Construction de la matrice $\underline{\underline{\mathcal{J}}}$

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}} = \langle \underline{\tilde{c}}(\underline{\varepsilon}), \underline{\mathcal{S}}'(\underline{\varepsilon}) - k_0^2 \mathbb{M}'(\underline{\varepsilon}) \underline{c}(\underline{\varepsilon}) \rangle$$

- * Résolution du système

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}}^t \underline{\underline{\mathcal{J}}} \underline{\delta \varepsilon} + \underline{\underline{\mathcal{J}}}^t \underline{r} = 0$$

- * Mise à jour de $\underline{\varepsilon}$:

$$\underline{\varepsilon}^{(k+1)} = \underline{\varepsilon}^{(k)} + \underline{\delta \varepsilon}$$

RÉGULARISATION DE TIKHONOV

- * Permet de bien conditionner le problème.

RÉGULARISATION DE TIKHONOV

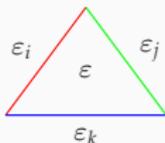
- * Permet de bien conditionner le problème.
- * Ajout d'une information pertinente sur la solution recherchée (sous forme de laplacien, permet d'éviter une différence trop forte entre les valeurs de permittivité).

RÉGULARISATION DE TIKHONOV

- * Permet de bien conditionner le problème.
- * Ajout d'une information pertinente sur la solution recherchée (sous forme de laplacien, permet d'éviter une différence trop forte entre les valeurs de permittivité).
- * Pour un maillage type éléments finis, le laplacien se traduit par un schéma différence finis associé aux éléments voisins par arête, i.e. :

RÉGULARISATION DE TIKHONOV

- * Permet de bien conditionner le problème.
- * Ajout d'une information pertinente sur la solution recherchée (sous forme de laplacien, permet d'éviter une différence trop forte entre les valeurs de permittivité).
- * Pour un maillage type éléments finis, le laplacien se traduit par un schéma différence finis associé aux éléments voisins par arête, i.e. :



$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \frac{b_0}{3}\varepsilon_i - \frac{b_1}{3}\varepsilon_j - \frac{b_2}{3}\varepsilon_k$$

CHOIX DES COEFFICIENTS \underline{b}

	Quadratique	Semi-quadratique ⁴
Valeur	$\underline{b} = 1$	$\left \begin{array}{l} \underline{b} = f(\nabla \varepsilon_i - \nabla \varepsilon_j) \\ f(x) = c_1(c_2 + x^2)^{-1} \end{array} \right.$
Avantages		
Inconvénients		

⁴  P. CHARBONNIER, *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*, Équipe ENDSUM, Cerema Strasbourg, (1994)

CHOIX DES COEFFICIENTS \underline{b}

	Quadratique	Semi-quadratique ⁴
Valeur	$\underline{b} = 1$	$\left \begin{array}{l} \underline{b} = f(\nabla \varepsilon_i - \nabla \varepsilon_j) \\ f(x) = c_1(c_2 + x^2)^{-1} \end{array} \right.$
Avantages	<ul style="list-style-type: none"> · Mise en place 	
Inconvénients		

⁴ P. CHARBONNIER, *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*, Équipe ENDSUM, Cerema Strasbourg, (1994)

CHOIX DES COEFFICIENTS \underline{b}

	Quadratique	Semi-quadratique ⁴
Valeur	$\underline{b} = 1$	$\left \begin{array}{l} \underline{b} = f(\nabla \varepsilon_i - \nabla \varepsilon_j) \\ f(x) = c_1(c_2 + x^2)^{-1} \end{array} \right.$
Avantages	<ul style="list-style-type: none"> · Mise en place 	
Inconvénients	<ul style="list-style-type: none"> · Convergence lente 	

⁴  P. CHARBONNIER, *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*, Équipe ENDSUM, Cerema Strasbourg, (1994)

CHOIX DES COEFFICIENTS \underline{b}

	Quadratique	Semi-quadratique ⁴
Valeur	$\underline{b} = 1$	$\left \begin{array}{l} \underline{b} = f(\nabla \varepsilon_i - \nabla \varepsilon_j) \\ f(x) = c_1(c_2 + x^2)^{-1} \end{array} \right.$
Avantages	<ul style="list-style-type: none">· Mise en place	<ul style="list-style-type: none">· Accentue les contrastes dans l'image
Inconvénients	<ul style="list-style-type: none">· Convergence lente	

⁴ P. CHARBONNIER, *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*, Équipe ENDSUM, Cerema Strasbourg, (1994)

CHOIX DES COEFFICIENTS \underline{b}

	Quadratique	Semi-quadratique ⁴
Valeur	$\underline{b} = 1$	$\left \begin{array}{l} \underline{b} = f(\nabla \varepsilon_i - \nabla \varepsilon_j) \\ f(x) = c_1(c_2 + x^2)^{-1} \end{array} \right.$
Avantages	<ul style="list-style-type: none">· Mise en place	<ul style="list-style-type: none">· Accentue les contrastes dans l'image· S'applique en post-traitement
Inconvénients	<ul style="list-style-type: none">· Convergence lente	

⁴ P. CHARBONNIER, *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*, Équipe ENDSUM, Cerema Strasbourg, (1994)

CHOIX DES COEFFICIENTS \underline{b}

	Quadratique	Semi-quadratique ⁴
Valeur	$\underline{b} = 1$	$\left \begin{array}{l} \underline{b} = f(\nabla \varepsilon_i - \nabla \varepsilon_j) \\ f(x) = c_1(c_2 + x^2)^{-1} \end{array} \right.$
Avantages	<ul style="list-style-type: none">· Mise en place	<ul style="list-style-type: none">· Accentue les contrastes dans l'image· S'applique en post-traitement
Inconvénients	<ul style="list-style-type: none">· Convergence lente	<ul style="list-style-type: none">· Choix des coefficients c_i

⁴ P. CHARBONNIER, *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*, Équipe ENDSUM, Cerema Strasbourg, (1994)

Application au banc EM

PREMIER CAS : CAROTTE DE BÉTON BITUMINEUX

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)

PREMIER CAS : CAROTTE DE BÉTON BITUMINEUX

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : [2.8 ; 4,6] GHz

PREMIER CAS : CAROTTE DE BÉTON BITUMINEUX

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : [2.8 ; 4,6] GHz
- * $d = 15$ cm, $\bar{\epsilon}_{bb} \in [3 ; 7]$

PREMIER CAS : CAROTTE DE BÉTON BITUMINEUX

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : [2.8 ; 4,6] GHz
- * $d = 15 \text{ cm}$, $\bar{\epsilon}_{\text{bb}} \in [3 ; 7]$

Échantillon



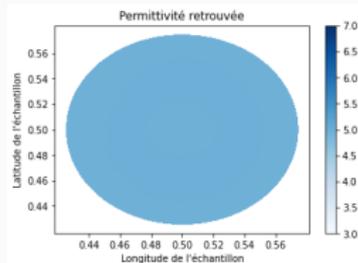
PREMIER CAS : CAROTTE DE BÉTON BITUMINEUX

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : $[2.8 ; 4, 6]$ GHz
- * $d = 15$ cm, $\bar{\epsilon}_{bb} \in [3 ; 7]$

Échantillon



Permittivité retrouvée



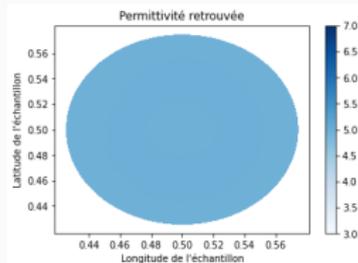
PREMIER CAS : CAROTTE DE BÉTON BITUMEUX

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : $[2.8 ; 4, 6]$ GHz
- * $d = 15$ cm, $\bar{\epsilon}_{bb} \in [3 ; 7]$

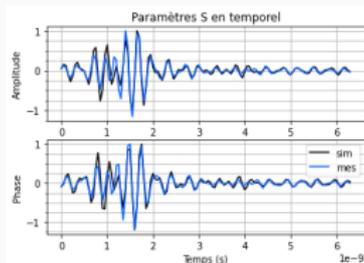
Échantillon



Permittivité retrouvée



Paramètre S_{21} en temporel



DEUXIÈME CAS : BÉTON BITUMINEUX ENFOUI DANS DU SABLE

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)

DEUXIÈME CAS : BÉTON BITUMINEUX ENFOUI DANS DU SABLE

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : [2.8 ; 4,6] GHz

DEUXIÈME CAS : BÉTON BITUMINEUX ENFOUI DANS DU SABLE

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : [2.8 ; 4, 6] GHz
- * $d_s = 11.5$ cm, $\bar{\epsilon}_{\text{sable}} \in [2.5 ; 3.5]$

DEUXIÈME CAS : BÉTON BITUMINEUX ENFOUI DANS DU SABLE

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : [2.8 ; 4, 6] GHz
- * $d_s = 11.5$ cm, $\bar{\epsilon}_{\text{sable}} \in [2.5 ; 3.5]$
- * $d_{bb} = 5$ cm, $\bar{\epsilon}_{bb} \in [3 ; 7]$

DEUXIÈME CAS : BÉTON BITUMINEUX ENFOUI DANS DU SABLE

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : [2.8 ; 4,6] GHz
- * $d_s = 11.5$ cm, $\bar{\epsilon}_{\text{sable}} \in [2.5 ; 3.5]$
- * $d_{bb} = 5$ cm, $\bar{\epsilon}_{bb} \in [3 ; 7]$

Échantillon



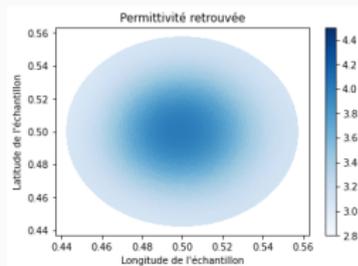
DEUXIÈME CAS : BÉTON BITUMINEUX ENFOUI DANS DU SABLE

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : [2.8 ; 4, 6] GHz
- * $d_s = 11.5$ cm, $\bar{\epsilon}_{\text{sable}} \in [2.5 ; 3.5]$
- * $d_{bb} = 5$ cm, $\bar{\epsilon}_{bb} \in [3 ; 7]$

Échantillon



Permittivité retrouvée



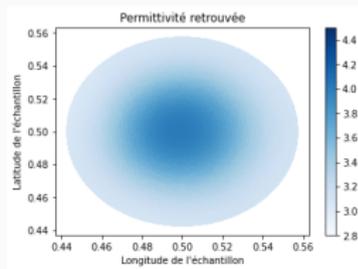
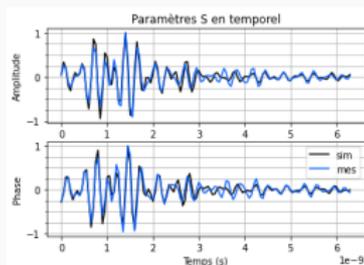
DEUXIÈME CAS : BÉTON BITUMINEUX ENFOUI DANS DU SABLE

- * Inversion sur les données du banc, pour une hauteur donnée (coupe 2D)
- * Intervalle de fréquences : $[2.8 ; 4, 6]$ GHz
- * $d_s = 11.5$ cm, $\bar{\epsilon}_{\text{sable}} \in [2.5 ; 3.5]$
- * $d_{bb} = 5$ cm, $\bar{\epsilon}_{bb} \in [3 ; 7]$

Échantillon

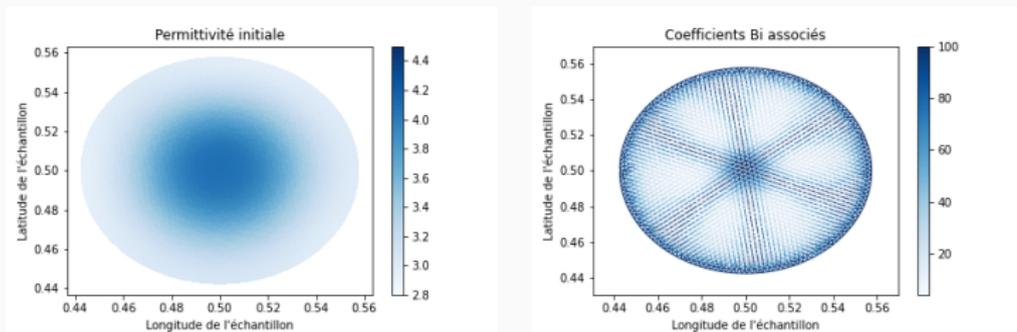


Permittivité retrouvée

Paramètre S_{21} en temporel

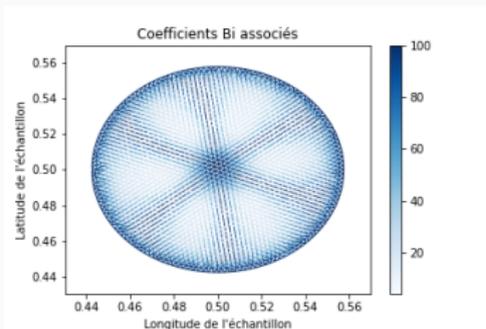
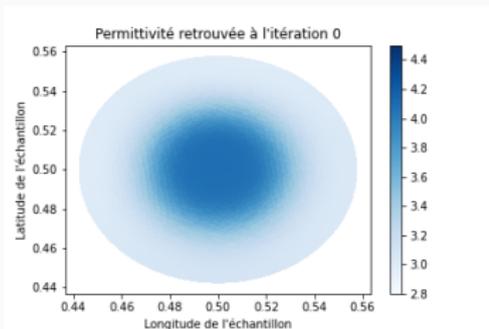
INTÉRÊT DE LA RÉGULARISATION SQ

Map de la permittivité initiale et ses coefficients b_i associés



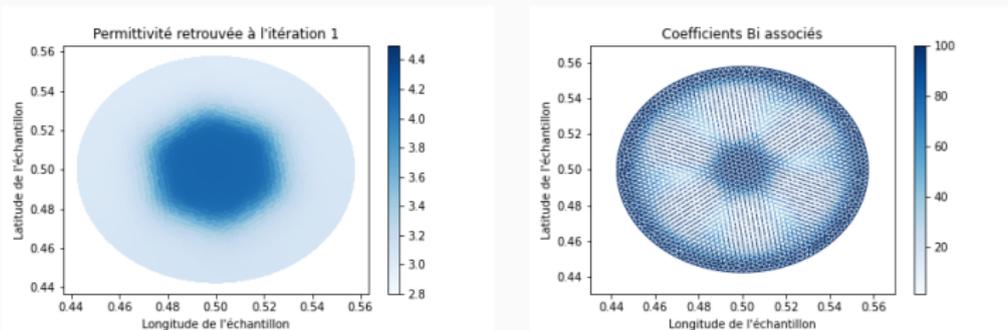
INTÉRÊT DE LA RÉGULARISATION SQ

Map de la permittivité et ses coefficients \underline{b} associés, itération 0



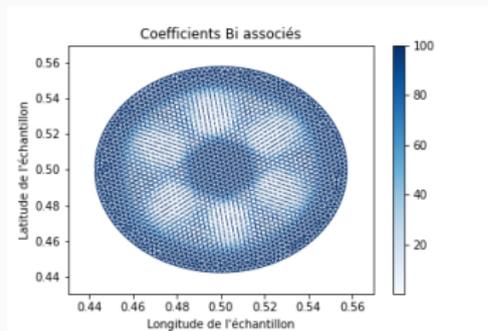
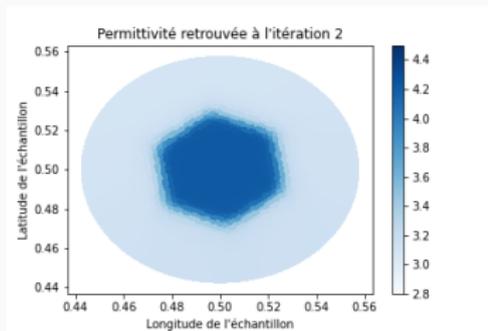
INTÉRÊT DE LA RÉGULARISATION SQ

Map de la permittivité et ses coefficients \underline{b} associés, itération 1



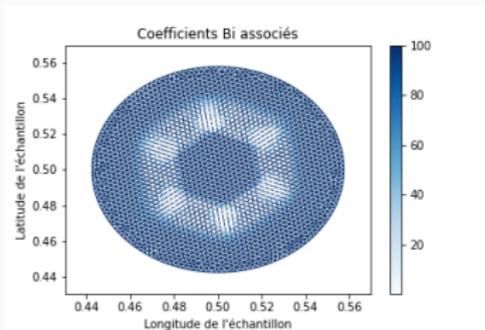
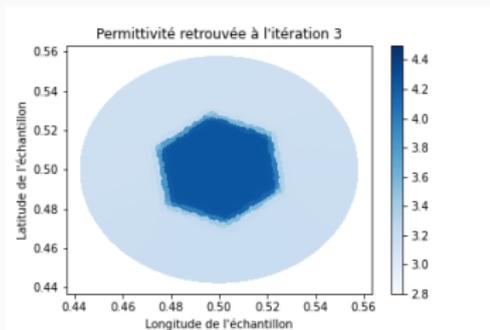
INTÉRÊT DE LA RÉGULARISATION SQ

Map de la permittivité et ses coefficients \underline{b} associés, itération 2



INTÉRÊT DE LA RÉGULARISATION SQ

Map de la permittivité et ses coefficients \underline{b} associés, itération 3



QUESTIONS ?

- 📖 C. FAUCHARD, *Estimation of compaction of bituminous mixtures at microwave frequencies*, 7ème Symp Int sur les ENDGC, (2009).
- 📖 P. MONK, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Numer. Analysis, (2005).
- 📖 S. LAMBOT, *Model. of GPR for accurate char. of subsurface elec. prop.*, IEEE Geoscience, 42, (2004).
- 📖 M. BONNET, *Identification et inversion*, Équipe POEMS, ENSTA Paris, (2020).
- 📖 P. CHARBONNIER, *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*, Équipe ENDSUM, Cerema Strasbourg, (1994).

QUESTIONS ?

- 📖 C. FAUCHARD, *Estimation of compaction of bituminous mixtures at microwave frequencies*, 7ème Symp Int sur les ENDGC, (2009).
- 📖 P. MONK, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Numer. Analysis, (2005).
- 📖 S. LAMBOT, *Model. of GPR for accurate char. of subsurface elec. prop.*, IEEE Geoscience, 42, (2004).
- 📖 M. BONNET, *Identification et inversion*, Équipe POEMS, ENSTA Paris, (2020).
- 📖 P. CHARBONNIER, *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*, Équipe ENDSUM, Cerema Strasbourg, (1994).

Merci pour votre attention !