



Stabilisation rapide des water waves linéarisée et backstepping de Fredholm pour opérateurs critiques

En collaboration avec Amaury Hayat, Shengquan Xiang et Christophe Zhang

24 mai 2023

SMAI 2023, Guadeloupe
Ludovick Gagnon

Inria Grand-Est, Équipe Sphinx
Institut Elie Cartan de Lorraine



Plan de la présentation

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

Présentation des water waves

Contrôle et stabilisation

Méthode du backstepping

Introduction

Méthode de dualité/compacité

Conclusion



2

Euler capillarité-gravité : Euler à surface libre pour un fluide parfait où la tension de surface et la capillarité ne peuvent être négligées.

Représentation du fluide:

$$\Omega(t) = \{(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \mid -h \leq y \leq \eta(x, t)\},$$

Équation du champ de vitesse:

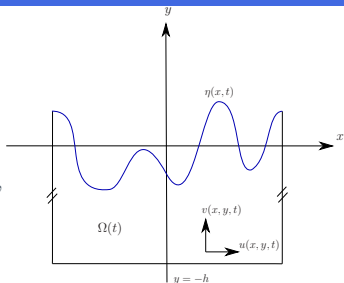
$$\begin{cases} \partial_t U + (U \cdot \nabla) U = -\nabla p - g e_2, & (x, y) \in \Omega(t), \\ \operatorname{div} U = 0, \operatorname{rot} U = 0, & (x, y) \in \Omega(t), \\ U \cdot n = 0, & (x, y) \in \mathbb{T} \times \{-h\}, \end{cases}$$

Condition au bord $y = \eta(t, x)$:

$$\begin{cases} \partial_t \eta = \sqrt{1 + |\nabla \eta|^2} U \cdot n, & (x, y) \in \mathbb{T} \times \{\eta(t, x)\}, \\ p = p_{atm} + P_{ext} - \sigma \kappa(\eta), & (x, y) \in \mathbb{T} \times \{\eta(t, x)\}, \end{cases}$$

Courbure moyenne:

$$\kappa(\eta) := \partial_x \left(\frac{\partial_x \eta}{\sqrt{1 + |\partial_x \eta|^2}} \right) = \frac{\partial_x^2 \eta}{(1 + (\partial_x \eta)^2)^{3/2}},$$





Puisque le fluide est irrotationnel et incompressible, le champ de vitesse s'écrit sous forme potentiel $U = \nabla_{x,y}\Phi$,

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gy = -(\rho - \rho_{atm}), & (x, y) \in \Omega(t), \\ \Delta \Phi = 0, & (x, y) \in \Omega(t), \\ \partial_n \Phi = 0, & (x, y) \in (0, 2\pi) \times \{-h\}, \\ \partial_t \eta = \sqrt{1 + |\nabla \eta|^2} \partial_n \Phi, & (x, y) \in (0, 2\pi) \times \{\eta(t, x)\}. \end{cases}$$

Le potentiel Φ est complètement déterminé par la connaissance de η et $\psi = \Phi|_{y=\eta}$. On introduit donc l'application Dirichlet-to-Neumann,

$$G[\eta, h]; \psi \mapsto \sqrt{1 + |\nabla \eta|^2} \partial_n \Phi|_{y=\eta} = \partial_y \Phi|_{y=\eta} - \partial_x \eta \partial_x \Phi|_{y=\eta}$$

On obtient finalement l'équation des water waves,

$$(WW) \quad \begin{cases} \partial_t \eta - G[\eta, h] \psi = 0, \\ \partial_t \psi + g\eta + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{(G[\eta, h] \psi + \nabla \eta \cdot \nabla \psi)^2}{2(1 + |\nabla \eta|^2)} = \sigma \kappa(\eta) - P_{ext}. \end{cases}$$

Le caractère bien posé des water waves a été largement étudié, notamment par Lannes et Alazard, Burq et Zuily.



Water waves linéarisée

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction
Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

4

On considère la linéarisation de (WW) autour de $(\psi, \eta) = (0, 0)$. En fixant $\sigma = 1$, on obtient,

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t \eta - G[0, h]\psi = 0, \\ \partial_t \psi + g\eta - \partial_x^2 \eta = -P_{ext}, \end{cases}$$

où $G[0, h] = |D_x| \tanh(h|D_x|)$ est un multiplicateur de Fourier,

$$G[0, h]\psi = G[0, h] \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \tanh(h|n|) \psi_n e^{inx}.$$

Définissant $A := -i((g - \partial_x^2)G[0, h])^{1/2}$, on a le problème spectral,

$$Ae^{inx} = \lambda_n e^{inx} = i\mu_n e^{inx} = -i((g - n^2)|n| \tanh(h|n|))^{1/2},$$

et donc des valeurs propres double pour $n \neq 0$ et simple pour $n = 0$. En posant $u = \psi + AG[0, h]^{-1}\eta$, on obtient,

$$\partial_t u = Au + P_{ext}.$$

Le problème de contrôle consiste à considérer la pression extérieure comme $P_{ext} = B_1(x)w_1(t) + B_2(x)w_2(t)$. Ainsi, on a donc,

$$\partial_t u(t) = Au(t) + Bw(t), \quad t \in [0, T],$$

avec l'opérateur de contrôle $B : w \in \mathbb{C}^2 \rightarrow B_1 w_1 + B_2 w_2$.



On définit d'abord la contrôlabilité de

$$(Cont) \quad \begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t) + Bw(t), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Définition (Contrôlabilité exacte)

Soit $T > 0$. On dit que (Cont) est contrôlable en temps T si et seulement si, pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ et toute donnée finale $u_f \in L^2(\mathbb{T})$, il existe un contrôle $w \in L^2((0, T); \mathbb{C}^2)$ telle que la solution u de (Cont) partant de $u(0) = u_0$ satisfasse $u(T) = u_f$.



On définit d'abord la contrôlabilité de

$$\text{(Cont)} \quad \begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t) + Bw(t), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Définition (Contrôlabilité exacte)

Soit $T > 0$. On dit que (Cont) est contrôlable en temps T si et seulement si, pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ et toute donnée finale $u_f \in L^2(\mathbb{T})$, il existe un contrôle $w \in L^2((0, T); \mathbb{C}^2)$ telle que la solution u de (Cont) partant de $u(0) = u_0$ satisfasse $u(T) = u_f$.

On s'intéressera plus particulièrement à la stabilisation rapide du système en boucle fermée avec une loi de feedback $w(t) = Ku(t)$,

$$\text{(Stab)} \quad \begin{cases} \partial_t u(t) = (A + BK)u(t), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Définition (Stabilisation rapide)

Soit $T > 0$. On dit qu'on a stabilisation rapide de (Stab) si pour tout $\lambda > 0$, il existe une loi de feedback $w(t) = Ku(t)$ telle que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, la solution $u(t)$ de (Stab) satisfasse

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq Ce^{-\lambda t} \|u_0\|_{L^2},$$

pour $C > 0$.



Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

6

Malgré les nombreux travaux de well-posedness de l'équation des water waves, peu de résultats concernent la contrôlabilité et la stabilisation.

Contrôle

- ▶ **Reid, '95**: contrôlabilité avec des conditions aux bords de Neumann (méthode des moments)
- ▶ **Alazard, Baldi, Han-Kwan, '18**: étude microlocale, paralinéarisation fine.
- ▶ **Zhu, '20**: water waves en 3D \Rightarrow condition de contrôle géométrique nécessaire

Stabilisation

- ▶ **Alazard, '17, '18** : stabilité asymptotique et exponentielle
- ▶ **Su, Tucsnak, Weiss, '20 et Su, '21** : stabilisabilité de l'équation linéarisée avec des contrôles frontières



Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $T > 0$.

(Contdimfinie)
$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t) + Bw(t), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

► Contrôle

Théorème (Critère de Kalman)

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$, $B \in M_{d,1}(\mathbb{R})$. Alors (Contdimfinie) est contrôlable en temps $T > 0$ si et seulement si $\text{rang} [B|AB|A^2B|\dots|A^{d-1}B] = n$.

► Stabilisation rapide

Théorème (Placement de pôles)

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$, $B \in M_{d,1}(\mathbb{R})$. Si (Contdimfinie) est contrôlable en temps $T > 0$, alors pour tout $\{\mu_n\}_{1 \leq n \leq d} \subset \mathbb{C}$, il existe $K \in M_{1,d}(\mathbb{R})$ telle que $\sigma(A + BK) = \{\mu_n\}_{1 \leq n \leq d}$. En particulier, on a la stabilisation rapide.



Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

8

Hypothèse

L'opérateur de contrôle $B = (B_1, B_2)$ est tel que $B_i \in H_i^{-3/4}(\mathbb{T})$ et satisfaisant, pour $B_i = \sum_n b_n^i \varphi_n^i$

$$(H) \quad b_0 \neq 0 \text{ et } c_1 < |b_n^i| < c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

pour $c_1, c_2 > 0$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$.



Hypothèse

L'opérateur de contrôle $B = (B_1, B_2)$ est tel que $B_i \in H_i^{-3/4}(\mathbb{T})$ et satisfaisant, pour $B_i = \sum_n b_n^i \varphi_n^i$

$$(H) \quad b_0 \neq 0 \text{ et } c_1 < |b_n^i| < c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

pour $c_1, c_2 > 0$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition (G., Hayat, Xiang, Zhang, '22)

Soit $T > 0$ et supposons (H). Alors pour tout $(u_0, u_f) \in (L^2(\mathbb{T}))^2$, il existe un contrôle $w \in L^2((0, T); \mathbb{C}^2)$ tel que la solution u de (Cont) partant de u_0 satisfasse $u(T) = u_f$.



Hypothèse

L'opérateur de contrôle $B = (B_1, B_2)$ est tel que $B_i \in H_i^{-3/4}(\mathbb{T})$ et satisfaisant, pour $B_i = \sum_n b_n^i \varphi_n^i$

$$(H) \quad b_0 \neq 0 \text{ et } c_1 < |b_n^i| < c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

pour $c_1, c_2 > 0$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition (G., Hayat, Xiang, Zhang, '22)

Soit $T > 0$ et supposons (H). Alors pour tout $(u_0, u_f) \in (L^2(\mathbb{T}))^2$, il existe un contrôle $w \in L^2((0, T); \mathbb{C}^2)$ tel que la solution u de (Cont) partant de u_0 satisfasse $u(T) = u_f$.

Théorème (G., Hayat, Xiang, Zhang, '22)

Pour tout $\lambda > 0$, il existe une loi de feedback $K \in \mathcal{L}(H_1^{3/4} \times H_2^{3/4}; \mathbb{C}^2)$ telle que pour tout $r \in (-1, 1)$ et toute donnée initiale $u(t)|_{t=0} = u_0 \in H^r$, le système en boucle fermé (Stab) a une unique solution $u \in C^0([0, +\infty); H^r(\mathbb{T}; \mathbb{C}))$. De plus, cette solution décroît exponentiellement à vitesse λ

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^r} \leq C e^{-\lambda t} \|u_0\|_{H^r}, \quad \forall t \in (0, +\infty),$$

avec $C > 0$.



Méthode du backstepping

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

9

On cherche à construire un opérateur K de sorte à avoir la stabilisation rapide de

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = (A + BK)u(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

L'idée est d'introduire pour tout $\lambda > 0$ le système cible

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = (A - \lambda I)v(t), \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

Ce système est exponentiellement stable :

$$\|v(t)\|_{L^2} \leq e^{-\lambda t} \|v_0\|_{L^2}.$$

On cherche à lier les deux solutions par une transformation : $v(t) = Tu(t)$. Si une telle transformation existe et est inversible, alors on a la stabilité rapide du système initial avec le choix $v_0 = Tu_0$,

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|T^{-1}v(t)\|_{L^2} \leq e^{-\lambda t} \|T^{-1}\| \|v_0\|_{L^2} \leq e^{-\lambda t} C_\lambda \|u_0\|_{L^2},$$

avec

$$C_\lambda := \|T\| \|T^{-1}\|$$



Méthode du backstepping de Fredholm

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

10

Pour caractériser (T, K) , on prend formellement la dérivée en temps de $v(t) = Tu(t)$,

$$\begin{aligned}\partial_t v(t) &= T\partial_t u(t) \\ (A - \lambda I)v(t) &= T(A + BK)u(t) \\ (A - \lambda I)Tu(t) &= T(A + BK)u(t)\end{aligned}$$

on donc on cherche une paire (T, K) telle que

$$T(A + BK) = (A - \lambda I)T.$$

Il est maintenant classique d'imposer la condition d'unicité $TB = B$,

$$(2) \quad \begin{cases} TA + BK = (A - \lambda I)T, \\ TB = B. \end{cases}$$

Théorème (Coron, '15)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que la paire (A, B) est contrôlable. Alors il existe une unique paire $(T, K) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R})$ solution de (2) et T est inversible.



Dans la littérature, on retrouve des transformations T de type de Volterra, et plus récemment de Fredholm,

$$v(x, t) = u(x, t) - \int_0^x k(x, y)u(y, t) dy, \quad v(x, t) = u(x, t) - \int_{\mathbb{T}} k(x, y)u(y, t) dy$$

Volterra : plus simple, mais existence pas garantie. Très grande littérature :

- ▶ Introduite par Balogh et Krstic en '92 pour l'équation de la chaleur.
- ▶ Plusieurs travaux permettant d'obtenir le noyau (approximation successive, méthode des caractéristiques, etc)

Fredholm :

- ▶ Introduite par Coron et Lü en '14 pour l'équation de KdV.
- ▶ Plus technique, moins de travaux, mais méthode de preuve systématique
 - ▶ Équation d'ordre 1 : Hyperbolic equation : Coron, Hu, Olive, '16 & Coron, Hu, Olive, Shang, '21, Linearized Water Tank : Coron, Hayat, Xiang, Zhang, '21, Transport equation : Zhang, '19, Zhang, '22.
 - ▶ Équation d'ordre ≥ 2 : KdV Coron, Lü, '14, Kuramoto-Sivashinsky Coron, Lü, '15, Linearized Schrödinger equation Coron, G., Morancey, '18, Degenerate parabolic operator G., Lissy, Marx, '20, Sharp framework for Laplacian G., Hayat, Xiang, Zhang, '21.



Backstepping de Fredholm pour WW

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction
Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

12

Définissons $v = Tu$ et $w(t) = Ku$ par,

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{T}} k(x, y)u(y, t) dy, \quad w(t) = Ku = \int_{\mathbb{T}} \alpha(y)u(y, t) dy.$$

On obtient donc l'EDP sur les noyaux k, α ,

$$A_x k(x, y) - A_y k(x, y) - \lambda k(x, y) = \alpha(y) \int_{\mathbb{T}} k(x, y)b(y) dy, \quad x, y \in \mathbb{T}.$$

Il s'agit de l'équivalent de l'équation $T(A + BK) = (A - \lambda I)T$.

24



Backstepping de Fredholm pour WW

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction
Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

12

Définissons $v = Tu$ et $w(t) = Ku$ par,

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{T}} k(x, y)u(y, t) dy, \quad w(t) = Ku = \int_{\mathbb{T}} \alpha(y)u(y, t) dy.$$

On obtient donc l'EDP sur les noyaux k, α ,

$$A_x k(x, y) - A_y k(x, y) - \lambda k(x, y) = \alpha(y) \int_{\mathbb{T}} k(x, y)b(y) dy, \quad x, y \in \mathbb{T}.$$

Il s'agit de l'équivalent de l'équation $T(A + BK) = (A - \lambda I)T$.

Afin de traiter le terme non-local, on écrit la condition d'unicité $TB = B$:

$$b(x) = Tb = \int_{\mathbb{T}} k(x, y)b(y) dy.$$

24



Backstepping de Fredholm pour WW

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction
Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

12

Définissons $v = Tu$ et $w(t) = Ku$ par,

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{T}} k(x, y)u(y, t) dy, \quad w(t) = Ku = \int_{\mathbb{T}} \alpha(y)u(y, t) dy.$$

On obtient donc l'EDP sur les noyaux k, α ,

$$A_x k(x, y) - A_y k(x, y) - \lambda k(x, y) = \alpha(y) \int_{\mathbb{T}} k(x, y)b(y) dy, \quad x, y \in \mathbb{T}.$$

Il s'agit de l'équivalent de l'équation $T(A + BK) = (A - \lambda I)T$.

Afin de traiter le terme non-local, on écrit la condition d'unicité $TB = B$:

$$b(x) = Tb = \int_{\mathbb{T}} k(x, y)b(y) dy.$$

Ainsi, on peut écrire la première équation comme

$$\begin{cases} A_x k(x, y) - A_y k(x, y) - \lambda k(x, y) = b(x)\alpha(y), & x, y \in \mathbb{T}, \\ \int_{\mathbb{T}} k(x, y)b(y) dy = b(x), & x \in \mathbb{T}. \end{cases}$$

C'est l'équivalent de

$$(2) \quad \begin{cases} TA + BK = (A - \lambda I)T, \\ TB = B. \end{cases}$$

24



Backstepping de Fredholm pour WW

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction
Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

12

Définissons $v = Tu$ et $w(t) = Ku$ par,

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{T}} k(x, y)u(y, t) dy, \quad w(t) = Ku = \int_{\mathbb{T}} \alpha(y)u(y, t) dy.$$

On obtient donc l'EDP sur les noyaux k, α ,

$$A_x k(x, y) - A_y k(x, y) - \lambda k(x, y) = \alpha(y) \int_{\mathbb{T}} k(x, y)b(y) dy, \quad x, y \in \mathbb{T}.$$

Il s'agit de l'équivalent de l'équation $T(A + BK) = (A - \lambda I)T$.

Afin de traiter le terme non-local, on écrit la condition d'unicité $TB = B$:

$$b(x) = Tb = \int_{\mathbb{T}} k(x, y)b(y) dy.$$

Ainsi, on peut écrire la première équation comme

$$\begin{cases} A_x k(x, y) - A_y k(x, y) - \lambda k(x, y) = b(x)\alpha(y), & x, y \in \mathbb{T}, \\ \int_{\mathbb{T}} k(x, y)b(y) dy = b(x), & x \in \mathbb{T}. \end{cases}$$

C'est l'équivalent de

$$(2) \quad \begin{cases} TA + BK = (A - \lambda I)T, \\ TB = B. \end{cases}$$

Il ne s'agit pas d'une EDP classique. On passe par des bases de Riesz pour en trouver la solution.

24



Preuve formelle pour Fredholm

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

13

Hypothèse : A diagonalisable $(\lambda_n, \varphi_n) \rightarrow TA + BK = (A - \lambda I)T$ devient

$$\lambda_n T \varphi_n + BK \varphi_n = (A - \lambda I) T \varphi_n.$$

24



Preuve formelle pour Fredholm

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

13

Hypothèse : A diagonalisable $(\lambda_n, \varphi_n) \rightarrow TA + BK = (A - \lambda I)T$ devient

$$\lambda_n T \varphi_n + BK \varphi_n = (A - \lambda I) T \varphi_n.$$

On définit $\alpha_n := K \varphi_n$, alors en supposant $\lambda + \lambda_n \neq \lambda_n, n, k \in (\mathbb{N}^*)^2$,

24



Preuve formelle pour Fredholm

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

13

Hypothèse : A diagonalisable $(\lambda_n, \varphi_n) \rightarrow TA + BK = (A - \lambda I)T$ devient

$$\lambda_n T \varphi_n + BK \varphi_n = (A - \lambda I) T \varphi_n.$$

On définit $\alpha_n := K \varphi_n$, alors en supposant $\lambda + \lambda_n \neq \lambda_n, n, k \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$T \varphi_n = \alpha_n (A - (\lambda_n + \lambda) I)^{-1} B.$$

24



Preuve formelle pour Fredholm

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

13

Hypothèse : A diagonalisable $(\lambda_n, \varphi_n) \rightarrow TA + BK = (A - \lambda I)T$ devient

$$\lambda_n T \varphi_n + BK \varphi_n = (A - \lambda I) T \varphi_n.$$

On définit $\alpha_n := K \varphi_n$, alors en supposant $\lambda + \lambda_n \neq \lambda_n, n, k \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$T \varphi_n = \alpha_n (A - (\lambda_n + \lambda) I)^{-1} B.$$

Étape 1: Définit $T \varphi_n = \alpha_n \tilde{T} \varphi_n$. Montrer que $q_n := \tilde{T} \varphi_n$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{T})$,

$$q_n = \tilde{T} \varphi_n = (A - (\lambda_n + \lambda) I)^{-1} B.$$

24



Hypothèse : A diagonalisable $(\lambda_n, \varphi_n) \rightarrow TA + BK = (A - \lambda I)T$ devient

$$\lambda_n T \varphi_n + BK \varphi_n = (A - \lambda I) T \varphi_n.$$

On définit $\alpha_n := K \varphi_n$, alors en supposant $\lambda + \lambda_n \neq \lambda_n, n, k \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$T \varphi_n = \alpha_n (A - (\lambda_n + \lambda) I)^{-1} B.$$

Étape 1: Définit $T \varphi_n = \alpha_n \tilde{T} \varphi_n$. Montrer que $q_n := \tilde{T} \varphi_n$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{T})$,

$$q_n = \tilde{T} \varphi_n = (A - (\lambda_n + \lambda) I)^{-1} B.$$

Étape 2: Utiliser $TB = B$ pour identifier $\alpha_n \in \ell^\infty$,

$$TB = B \Leftrightarrow T \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n \varphi_n = B \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n b_n \tilde{T} \varphi_n = B.$$



Preuve formelle pour Fredholm

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/capacité

Conclusion

13

Hypothèse : A diagonalisable $(\lambda_n, \varphi_n) \rightarrow TA + BK = (A - \lambda I)T$ devient

$$\lambda_n T \varphi_n + BK \varphi_n = (A - \lambda I) T \varphi_n.$$

On définit $\alpha_n := K \varphi_n$, alors en supposant $\lambda + \lambda_n \neq \lambda_n, n, k \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$T \varphi_n = \alpha_n (A - (\lambda_n + \lambda) I)^{-1} B.$$

Étape 1: Définit $T \varphi_n = \alpha_n \tilde{T} \varphi_n$. Montrer que $q_n := \tilde{T} \varphi_n$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{T})$,

$$q_n = \tilde{T} \varphi_n = (A - (\lambda_n + \lambda) I)^{-1} B.$$

Étape 2: Utiliser $TB = B$ pour identifier $\alpha_n \in \ell^\infty$,

$$TB = B \Leftrightarrow T \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n \varphi_n = B \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n b_n \tilde{T} \varphi_n = B.$$

Étape 3: T est Fredholm et inversible : soit $x \in \text{Ker}(T^*)$, alors,

$$B^* x = B^* T^* x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Ker}(T^*) = \{0\}$$

24



Preuve formelle pour Fredholm

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

13

Hypothèse : A diagonalisable $(\lambda_n, \varphi_n) \rightarrow TA + BK = (A - \lambda I)T$ devient

$$\lambda_n T\varphi_n + BK\varphi_n = (A - \lambda I)T\varphi_n.$$

On définit $\alpha_n := K\varphi_n$, alors en supposant $\lambda + \lambda_n \neq \lambda_n, n, k \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$T\varphi_n = \alpha_n(A - (\lambda_n + \lambda)I)^{-1}B.$$

Étape 1: Définit $T\varphi_n = \alpha_n \tilde{T}\varphi_n$. Montrer que $q_n := \tilde{T}\varphi_n$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{T})$,

$$q_n = \tilde{T}\varphi_n = (A - (\lambda_n + \lambda)I)^{-1}B.$$

Étape 2: Utiliser $TB = B$ pour identifier $\alpha_n \in \ell^\infty$,

$$TB = B \Leftrightarrow T \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n \varphi_n = B \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n b_n \tilde{T}\varphi_n = B.$$

Étape 3: T est Fredholm et inversible : soit $x \in \text{Ker}(T^*)$, alors,

$$B^*x = B^*T^*x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Ker}(T^*) = \{0\}$$

Remarque : Selon (H), B n'est pas dans L^2 mais dans $D(A^*)'$. Si B l'était, ou si $\alpha_n \in \ell^2$, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|T\varphi_n\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|\alpha_n \tilde{T}\varphi_n\|_{L^2}^2 \leq C \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |\alpha_n|^2 < \infty$$

24

et donc T est un opérateur d'Hilbert-Schmidt compact et donc pas inversible.



Définition

Soit H un espace de Hilbert. Si $\{\varphi_n\}$ est une base orthonormale de H et T est un isomorphisme de H vers H , alors $q_n := T(\varphi_n)$ est une base de Riesz.

Définition

Soit $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille dense dans H . Alors, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base de Riesz de H si et seulement si il existe $c, C > 0$ tel que,

$$c \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |a_n|^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n q_n \right\|_H^2 \leq C \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |a_n|^2,$$

$$\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}).$$

Théorème

Soit $\{\varphi_n\}$ est une base orthonormale de H . Si une famille $\{q_n\}$ est libre ou complète dans H et quadratiquement proche de $\{\varphi_n\}$, c'est-à-dire,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|\varphi_n - q_n\|_{L^2}^2 < \infty,$$

alors $\{q_n\}$ est une base de Riesz de H .



Étape 1 : Identification de la base de Riesz

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

15

On identifie la base de Riesz,

$$\begin{aligned} T\varphi_n &= \alpha_n(A - (\lambda_n + \lambda)I)^{-1}B \\ &= \alpha_n \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{b_k \varphi_k}{\lambda_k - \lambda_n - \lambda}, \end{aligned}$$

avec $\alpha_n = K\varphi_n$. On renormalise,

$$q_n := \tilde{T}\varphi_n = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{b_k \varphi_k}{\lambda_k - \lambda_n - \lambda}.$$

24



Étape 1 : Identification de la base de Riesz

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

15

On identifie la base de Riesz,

$$\begin{aligned} T\varphi_n &= \alpha_n(A - (\lambda_n + \lambda)I)^{-1}B \\ &= \alpha_n \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{b_k \varphi_k}{\lambda_k - \lambda_n - \lambda}, \end{aligned}$$

avec $\alpha_n = K\varphi_n$. On renormalise,

$$q_n := \tilde{T}\varphi_n = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{b_k \varphi_k}{\lambda_k - \lambda_n - \lambda}.$$

La condition d'Hilbert-Schmidt (à renormalisation près), en considérant $\lambda_n \simeq in^a$, donne

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| -\frac{b_n \varphi_n}{\lambda} - q_n \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| \sum_{k \neq n} \frac{b_k \varphi_k}{\lambda_k - \lambda_n - \lambda} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{k \neq n} \left| \frac{b_k}{\lambda_k - \lambda_n - \lambda} \right|^2 < \infty \end{aligned}$$

si $a > 3/2$. Le cas $1 \leq a \leq 3/2$ est donc un cas critique avec la transformation de Fredholm.

24



Méthode de dualité/compacité

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

16

On considère le cas $\lambda_n = in^a$, avec $a > 1$. À renormalisation près,

$$S : \varphi_n \mapsto \tilde{q}_n = -\frac{\varphi_n}{\lambda} + \sum_{k \neq n} \frac{b_k \varphi_k}{b_n(\lambda_k - \lambda_n - \lambda)} =: -\frac{1}{\lambda} Id + S_c.$$

24



Méthode de dualité/compacité

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

16

On considère le cas $\lambda_n = in^a$, avec $a > 1$. À renormalisation près,

$$S : \varphi_n \mapsto \tilde{q}_n = -\frac{\varphi_n}{\lambda} + \sum_{k \neq n} \frac{b_k \varphi_k}{b_n(\lambda_k - \lambda_n - \lambda)} =: -\frac{1}{\lambda} Id + S_c.$$

Sous l'hypothèse $cn^a \leq |\lambda_n| \leq Cn^a$ et $|\lambda_m - \lambda_n| > |n - m|n^{a-1}$ pour $a > 1$, permet de déduire

Lemma (Technique)

Pour tout $s < 1/2$, il existe $C > 0$ tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}} \frac{n^s}{|\lambda_n - \lambda_p|} \leq C(p^{-1/2+s} \log(p) + p^{-3/2}), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

et

24



On considère le cas $\lambda_n = in^a$, avec $a > 1$. À renormalisation près,

$$S : \varphi_n \mapsto \tilde{q}_n = -\frac{\varphi_n}{\lambda} + \sum_{k \neq n} \frac{b_k \varphi_k}{b_n(\lambda_k - \lambda_n - \lambda)} =: -\frac{1}{\lambda} Id + S_c.$$

Sous l'hypothèse $cn^a \leq |\lambda_n| \leq Cn^a$ et $|\lambda_m - \lambda_n| > |n - m|n^{a-1}$ pour $a > 1$, permet de déduire

Lemma (Technique)

Pour tout $s < 1/2$, il existe $C > 0$ tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}} \frac{n^s}{|\lambda_n - \lambda_p|} \leq C(p^{-1/2+s} \log(p) + p^{-3/2}), \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

et

Lemma

S_c est continue de H^r dans $H^{r+\epsilon}$ pour $r \in (1/2 - a, a - 1/2)$. S_c est donc compact de H^r dans lui-même et $S = \frac{1}{\lambda} I + S_c$ est Fredholm d'indice 0 de H^r dans lui-même.



Preuve dans L^2 et $a = 3/2$:

$$\begin{aligned}\|S_C f\|_{H^\epsilon}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{2\epsilon} \left| \sum_{n \neq k} \frac{f_n}{\lambda_k - \lambda_n - \lambda} \right|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{2\epsilon} \left(\sum_{n \neq k} \frac{|f_n|^2 n^{-1/2+2\epsilon}}{|\lambda_k - \lambda_n|} \right) \left(\sum_{n \neq k} \frac{n^{1/2-2\epsilon}}{|\lambda_k - \lambda_n|} \right) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{2\epsilon} \left(\sum_{n \neq k} \frac{|f_n|^2 n^{-1/2+2\epsilon}}{|\lambda_k - \lambda_n|} \right) (k^{-2\epsilon} \log(k) + k^{-3/2}) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |f_n|^2 n^{-1/2+2\epsilon} \left(\sum_{k \neq n} \frac{k^{2\epsilon}}{|\lambda_k - \lambda_n|} (k^{-3\epsilon/2} + k^{-3/2}) \right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |f_n|^2 n^{-1/2+2\epsilon} \left(n^{-1/2+\epsilon/2} \log(n) + n^{-2+2\epsilon} \log(n) + n^{-3/2} \right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |f_n|^2 = \|f\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$



Proposition

La famille $q_n = S\varphi_n$ est une base de Riesz de L^2 . De même, la famille $n^{-r}q_n$ est une base de Riesz de H^r pour $r \in (1/2 - a, a - 1/2)$.

Preuve : puisqu'on a montré que S est Fredholm d'indice 0, il suffit de montrer que $\text{Ker}(S) = \{0\}$ pour exhiber l'isomorphisme. Cela revient à montrer

$$S(f) = S\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n \varphi_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n q_n = 0 \Leftrightarrow f_n \equiv 0 \text{ dans } \ell^2(\mathbb{N}^*; \mathbb{C}).$$



Proposition

La famille $q_n = S\varphi_n$ est une base de Riesz de L^2 . De même, la famille $n^{-r}q_n$ est une base de Riesz de H^r pour $r \in (1/2 - a, a - 1/2)$.

Preuve : puisqu'on a montré que S est Fredholm d'indice 0, il suffit de montrer que $\text{Ker}(S) = \{0\}$ pour exhiber l'isomorphisme. Cela revient à montrer

$$S(f) = S\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n \varphi_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n q_n = 0 \Leftrightarrow f_n \equiv 0 \text{ dans } \ell^2(\mathbb{N}^*; \mathbb{C}).$$

On a,

Lemma

The sequences $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ and $(\overline{q}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfy the following:*

- (i) $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is either ω -independent in L^2 or L^2 -dense.
- (ii) $(\overline{q}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is either ω -independent in L^2 or L^2 -dense.
- (iii) $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is ω -independent in $L^2 \iff (\overline{q}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is ω -independent in L^2 .
- (iv) $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is L^2 -dense $\iff (\overline{q}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is L^2 -dense.
- (v) $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is L^2 -dense $\iff (\overline{q}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is ω -independent in L^2 .
- (vi) $(\overline{q}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is L^2 -dense $\iff (q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is ω -independent in L^2 .

Consequently, we know that $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}^}$ (resp. $\{\overline{q}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$) is both ω -independent in L^2 and L^2 dense.*



Étape 2 : construction du feedback avec $TB = B$

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

19

Il reste à satisfaire l'équation $TB = B$. On a,

$$T \left(\sum_n b_n \varphi_n \right) = \sum_n b_n \varphi_n$$

$$\sum_n \alpha_n b_n \tilde{T} \varphi_n = \sum_n b_n \varphi_n$$

$$\sum_n \alpha_n b_n q_n = \sum_n b_n \varphi_n$$

$$\sum_n (n^{-1/2-\epsilon} \alpha_n b_n) n^{1/2+\epsilon} q_n = \sum_n b_n \varphi_n \in H^{-1/2-\epsilon}$$

et donc, puisque $n^{1/2+\epsilon} q_n$ est une base de Riesz de $H^{-1/2-\epsilon}$, on a l'égalité pour $\epsilon \in (0, a-1)$. On déduit,

Lemma

Il existe une unique suite α_n telle que

$$(n^{-1/2-\epsilon} \alpha_n b_n) \in \ell^2(\mathbb{N}^*; \mathbb{C}).$$

Par contre, on ne sait pas encore si $\alpha_n \in \ell^\infty$.

24



Étape 2 : construction du feedback avec $TB = B$

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

20

On décompose

$$\alpha_n \simeq 1 + k_n^0,$$

En utilisant la décomposition de q_n en partie inversible + compact, on réussit à annuler une partie singulière de $TB = B$ et on conclut que,

$$\alpha_n \in \ell^\infty, \text{ quad si } a > 3/2.$$

Ce n'est pas suffisant. On continue par un argument inductif sur k_n^0 en le décomposant de sorte à annuler la nouvelle partie singulière et à maintenir l'égalité pour la partie régulière. L'argument clé est que chaque itération permet d'obtenir un gain de régularité d'ordre $a - 1 > 0$. Ainsi, pour tout opérateur d'ordre $a > 1$, il existe un nombre fini d'itérations permettant d'écrire l'égalité $TB = B$ en ayant la borne souhaitée $\alpha_n \in \ell^\infty$.

24



Étape 3 : inversibilité de T

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

21

Avec la régularité $\alpha_n \in \ell^\infty$, $T : H^r \rightarrow H^r$, $r \in (-1, 1)$. Preuve L^2 :

$$\|Tf\|_{L^2} = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n f_n \tilde{T}_n \right\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

On montre finalement, avec des techniques classiques de perturbations analytiques du spectre, que T est inversible de H^r dans lui-même.

24



Étape 3 : inversibilité de T

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

21

Avec la régularité $\alpha_n \in \ell^\infty$, $T : H^r \rightarrow H^r$, $r \in (-1, 1)$. Preuve L^2 :

$$\|Tf\|_{L^2} = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n f_n \tilde{T}_n \right\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

On montre finalement, avec des techniques classiques de perturbations analytiques du spectre, que T est inversible de H^r dans lui-même. De plus, le système en boucle fermé

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = (\mathcal{L} + BK)u(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

est bien posé dans H^r , $r \in (1/2 - a, a - 1/2)$. On obtient finalement la stabilité rapide.

24



Conclusion

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

22

- ▶ On obtient la stabilisation rapide H^r , $r \in (-1, 1)$ avec le même feedback $K : H^{3/4} \rightarrow \mathbb{C}$;
- ▶ On peut montrer la stabilisation rapide H^{s+r} , $r \in (-1, 1)$ et $s \in \mathbb{R}$ à condition de changer la régularité de B ;

24



Conclusion

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

22

- ▶ On obtient la stabilisation rapide H^r , $r \in (-1, 1)$ avec le même feedback $K : H^{3/4} \rightarrow \mathbb{C}$;
- ▶ On peut montrer la stabilisation rapide H^{s+r} , $r \in (-1, 1)$ et $s \in \mathbb{R}$ à condition de changer la régularité de B ;
- ▶ Comme on a vu dans les preuves, on obtient en fait le résultat général pour les opérateurs anti-adjoints,

Théorème (G., Hayat, Xiang, Zhang, '22)

Let $a > 1$. Let $B \in (H^{-3/4})^2$ satisfying Assumption (H) concerning controllability. Let $h(s)$ a real valued-function satisfying

- ▶ $|n_1 - n_2| n_1^{a-1} \lesssim |h(n_1) - h(n_2)|$ for any $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^*$.
- ▶ $s^a \lesssim |h(s)| \lesssim s^a$ for any $s \in [1, +\infty)$.

Then, for any $\lambda > 0$, there exists a bounded linear operator $K \in \mathcal{L}(H^{3/4}; \mathbb{C}^2)$ and an operator T such that T is an isomorphism from $H^r(\mathbb{T})$ to itself for any $r \in (1/2 - a, a - 1/2)$ and maps the system

$$(3) \quad \partial_t u = i h(|D_x|)u + BK(u), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T},$$

to the system

$$\partial_t v = i h(|D_x|)v - \lambda v, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}.$$

Consequently, the closed-loop system (3) is exponentially stable in H^r for $r \in (1/2 - a, a - 1/2)$ with decay rate λ .

24



Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

23

- ▶ Dans des travaux en cours, nous généralisons le résultat précédent dans le cas de perturbation A borné d'un opérateur auto-adjoint, et dans le cas d'un opérateur anti-adjoint avec une perturbation du spectre arbitraire mais borné sur l'axe réel. Cela repose sur la résolution explicite de l'équation $TB = B$, nous permettant d'identifier directement l'isomorphisme T , et de déduire *a posteriori* l'existence d'une base de Riesz. De plus, nous obtenons une estimation optimale,

$$|C_\lambda| \leq C\lambda^{2a}e^{\lambda^{1/a}}$$

- ▶ Des systèmes hyperboliques?

24



Merci de votre attention

Stabilisation rapide
LWWS

Présentation des
water waves

Contrôle et
stabilisation

Méthode du
backstepping

Introduction

Méthode de
dualité/compacité

Conclusion

24

24