Calculs de solitons pour des modèles dispersifs

Laurent DI MENZA, LMR, UMR 9008, Moulin de la Housse - 51687 Reims, France

Il est bien connu depuis longtemps que les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires régissant la propagation d'ondes dans des milieux dispersifs présentent une grande richesse de comportement en temps. A titre d'exemple, pour l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

donc avec non-linéarité de type puissance pure en dimension d d'espace (voir par exemple [6]), on peut distinguer plusieurs types de solutions en fonction de la donnée initiale $u(0) = \varphi$. Entre celles se comportant comme dans le cas linéaire et celles qui font apparaître une singularité en temps fini, on trouve une famille de solutions se propageant sans changer de forme, appelée communément *soliton*. La première observation historique d'un soliton a été faite par J.-S. Russel en 1834 le long d'un canal suite à l'arrêt brusque d'une barge (voir [5]) et depuis, des efforts intensifs ont été menés pour étudier de tels objets. Dans le cas particulier de l'équation de Schrödinger, on cherche logiquement la solution de la forme $u(t, x) = e^{i\omega t} U(x)$, où le profil spatial U de comportement donné à l'infini (typiquement, U tend vers zéro pour avoir une solution localisée en espace) vérifie l'équation elliptique semi linéaire

$$-\omega U + \Delta U + |U|^{2\sigma} U = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Le problème est alors de pouvoir calculer ces profils U. Hormis le cas particulier de la dimension 1 d'espace où une intégration explicite est possible, il n'est alors pas trivial d'obtenir leur expression en dimensions supérieures ou bien dans le cas de systèmes couplés, ce qui rend indispensable l'utilisation de l'outil numérique pour en calculer des approximations.

L'objectif de cet exposé est de passer en revue quelques techniques de calcul de solitons telles que les méthodes de réduction en dimension finie, les méthodes de continuation de paramètres ou de tir pour des équations et systèmes d'équations présentées dans [1], [2], [3], [4], dans des cas idéalisés, linéairement couplés comme pour le système

$$\left\{ \begin{array}{l} i\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + Kv = 0 \\ i\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + |v|^2 v + Ku = 0, \end{array} \right.$$

intervenant dans des fibres optiques ou dans le cas de modèles avec masses de Dirac matérialisant la présence d'impuretés dans le milieu non linéaire.

[1] M. Colin, L. DiMenza, J.-C. Saut. *Solitons in quadratic media.* Nonlinearity, **29(3)**, 2016.

[2] L. DiMenza. *Numerical computation of solitons for optical media.* M2AN, **1(3)**, 2009.

[3] L. DiMenza. *Solitons for coupled systems in optical fibers.* Preprint, 2023.

[4] L. DiMenza, C. Gallo. *The black solitons for of one-dimensional nls equation.* Nonlinearity, **20**, 2007.

[5] J.-S. Russel. *Reports on waves.* Meetings of the British Association, 1844.

[6] C. Sulem, P.-L. Sulem. *The nonlinear schrödinger equation : Self-focusing and wave collapse.* AMS, **139**, 1999.

Contact : `laurent.di-menza@univ-reims.fr`